

幾何学概論第一 (MTH.B211)

5: 陰関数定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/29(2020/11/05 訂正)

事実

\mathbb{R}^2 の領域 U で定義された C^∞ -級関数 F に対して $S := \{(x, y); F(x, y) = 0\}$ が空集合でないとする。もしも S の各点で $dF = (F_x, F_y) \neq 0$ ならば, S は \mathbb{R}^2 の自己交叉をもたないなめらかな曲線となる。

なめらかな曲線

- ▶ \mathbb{R}^2 の部分集合 C が (自己交叉のない) なめらかな曲線であるとは, 各点 $P \in C$ に対して P の近傍 $U \subset \mathbb{R}^2$, \mathbb{R} の開区間 I , C^∞ -級関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$C \cap U \text{ が } \{(x, f(x)); x \in I\} \text{ と合同となること.}$$

- ▶ \mathbb{R} の区間 J で定義された C^∞ -級写像 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線であるとは, J の各点 t に対して t を含む開区間 J_t が存在して $\gamma(J_t) \subset \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線となること。

逆写像定理

定理 (逆写像定理)

n を正の整数とする。 \mathbb{R}^n の領域 U で定義された C^∞ -級写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ のヤコビ行列が $a \in U$ で零でないとする, ある a の近傍 V が存在して次を満たす:

- ▶ $f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ は単射,
- ▶ $(f|_V)^{-1}: f(V) \rightarrow U$ は C^∞ -級.

パラメータ表示された曲線

定理

正則にパラメータ表示された曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ はなめらかな曲線。

証明.

- ▶ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ とおくと $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ -級。
- ▶ $t_0 \in I$ をとる。正則性から $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ だから $\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)$ のいずれかは零でない。
- ▶ $\dot{y}(t_0) \neq 0$ のとき, 逆写像定理から t_0 を含む開区間 I' で $y|_{I'}$ が単射, 逆 $\varphi: J' := y(I') \rightarrow I'$ が C^∞ -級となるものが存在。
- ▶ $\gamma(I') = \{(x(t), y(t)); t \in I'\} = \{(x \circ \varphi(y), y \circ \varphi(y)); y \in J'\} = \{(f(y), y); y \in J'\}$ ($f = x \circ \varphi$)
右辺は $\{(x, f(x)); x \in J'\}$ と合同。

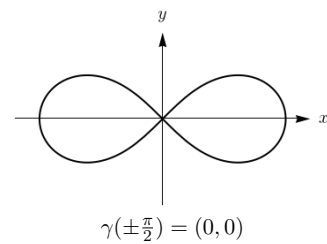
$\dot{x}(t_0) \neq 0$ の場合も同様。 □

例 (レムニスケート)

レムニスケート (周期 2π)

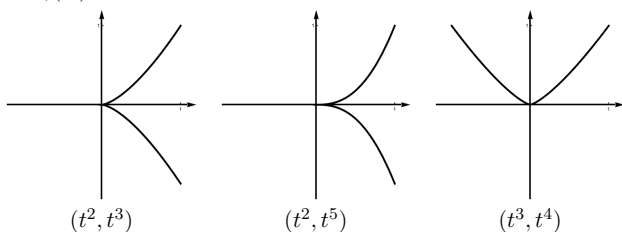
$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right) = \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} (1, \sin t)$$

$$\dot{\gamma}(t) = -\frac{\sin t(2 + \cos^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2} (1, \sin t) + \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} (0, \cos t) \neq 0$$



パラメータ表示の特異点

- ▶ パラメータ表示された曲線 γ の特異点: $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ となる点。
- ▶ $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ ということだけから曲線の形はわからない。



陰関数定理

定理 (講義資料5; 系 5.3)

\mathbb{R}^n の領域 U 上で定義された C^∞ -級関数 $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ が, $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ で

$$F(a) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$$

を満たしているとき, $a \in U$ の近傍 V と $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ の近傍 W 上で定義された関数 f が存在して $\{x \in V; F(x) = 0\} = \{(w, f(w)); w \in W\}$, とくに $F(w, f(w)) = 0$ ($w \in W$) が成り立つ。

定理 (講義資料5; 系 5.5)

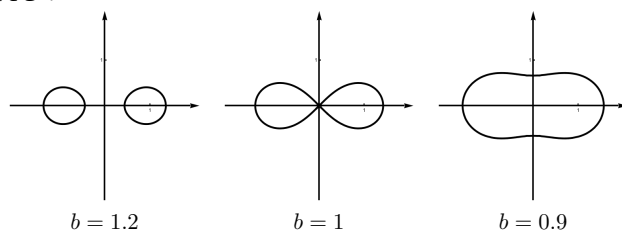
\mathbb{R}^2 の領域 U で定義された C^∞ -級関数 F に対して $S := \{(x, y); F(x, y) = 0\}$ が空集合でないとする. もしも S の各点で $dF = (F_x, F_y) \neq 0$ ならば, S は \mathbb{R}^2 の自己交叉をもたないなめらかな曲線となる.

例

2点 $(\pm 1, 0)$ からの距離の積が一定 b^2 ($b > 0$) な点の集合 S_b は

$$F_b(x, y) := ((x - 1)^2 + y^2)((x + 1)^2 + y^2) - b^4$$

の零点集合 (カッシニの橙線) $b \neq 1$ のときなめらかな曲線を与える.



陰関数表示の特異点

陰関数 $F(x, y) = 0$ で与えられる xy 平面の曲線上の点 (x_0, y_0) が特異点であるとは,

$$dF(x_0, y_0) = (F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)) = 0$$

となることである.

Example

レムニスケート (カッシニの橙線の $b = 1$ の場合) 上の点 $(0, 0)$ は特異点である.

陰関数の微分公式

陰関数 $F(x, y) = 0$ が y について, $y = f(x)$ と書けるとき,

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

問題

$f''(x)$ を F の偏導関数で表しなさい.

問題 5-1

問題

次は正しいか, 理由をつけて答えなさい.

- \mathbb{R} の開区間 I 上で定義された C^∞ -級関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が I の各点で $f' \neq 0$ を満たしているとする. f は単射で, C^∞ -級の逆写像 $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ が存在する.
- \mathbb{R}^2 の領域 U 上で定義された C^∞ -級写像 $g: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列式が U の各点で零でないならば, g は単射で, C^∞ -級の逆写像 $g^{-1}: g(U) \rightarrow U$ が存在する.

問題 5-2

問題

$F(x, y) = x^4 + y^4 - 1$ とおくと, $F^{-1}(\{0\})$ は平面のなめらかな曲線を与える. この曲線の曲率は符号を変えないことを示しなさい.