幾何学概論第一 (MTH.B211)

5: 陰関数定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/29(2020/11/05 **訂正**)

目標

事実

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 F に対して $S := \{(x,y)\,;\, F(x,y)=0\}$ が空集合でないとする．もしも S の各点で $dF=(F_x,F_y)\neq \mathbf{0}$ ならば，S は $\mathbb{R}^2$ の自己交叉をもたないなめらかな曲線となる．

なめらかな曲線

- $\mathbb{R}^2$ の部分集合 C が（自己交叉のない）なめらかな曲線であるとは，各点 $\mathrm{P} \in C$ に対して P の近傍 $U \subset \mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}$ の開区間 I，C^∞-級関数 $f \colon I \to \mathbb{R}$ が存在して

$$C \cap U \quad \text{が} \quad \bigl\{\bigl(x, f(x)\bigr)\,;\, x \in I\bigr\} \quad \text{と合同となること．}$$

- $\mathbb{R}$ の区間 J で定義された C^∞-級写像 $\gamma \colon J \to \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線であるとは，J の各点 t に対して t を含む開区間 J_t が存在して $\gamma(J_t) \subset \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線となること．

逆写像定理

定理 (逆写像定理)

n を正の整数とする．$\mathbb{R}^n$ の領域 U で定義された C^∞-級写像 $\boldsymbol{f}\colon U \to \mathbb{R}^n$ のヤコビ行列式が $\boldsymbol{a} \in U$ で零でないとすると，ある $\boldsymbol{a}$ の近傍 V が存在して次を満たす：

- **$\boldsymbol{f}|_V\colon V \to \mathbb{R}^n$ は単射，**
- **$(\boldsymbol{f}|_V)^{-1}\colon \boldsymbol{f}(V) \to U$ は C^∞-級．**

パラメータ表示された曲線

定理

正則にパラメータ表示された曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ **はなめらかな曲線．**

証明.

- $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ **とおくと** $x, y\colon I \to \mathbb{R}$ **は** C^∞**-級．**
- $t_0 \in I$ **をとる．正則性から** $\dot\gamma(t_0) \neq 0$ **だから** $\dot x(t_0)$, $\dot y(t_0)$ **のいずれかは零でない．**
- $\dot y(t_0) \neq 0$ **のとき，逆写像定理から** t_0 **を含む開区間** I' **で** $y|_{I'}$ **が単射，逆** $\varphi\colon J' := y(I') \to I'$ **が** C^∞**-級となるものが存在．**
- $\gamma(I') = \bigl\{\bigl(x(t), y(t)\bigr)\,;\, t \in I'\bigr\} = \{(x\circ\varphi(y), y\circ\varphi(y)); y \in J'\}$ $= \{(f(y), y)\,;\, y \in J'\}$ $(f = x\circ\varphi)$
  右辺は $\{(x, f(x))\,;\, x \in J'\}$ **と合同．**

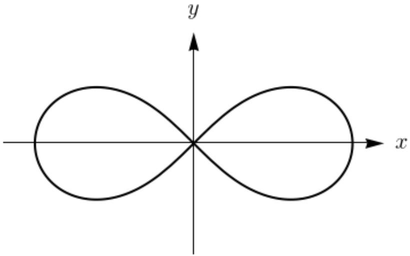
$\dot x(t_0) \neq 0$ **の場合も同様．** □

例（レムニスケート）

レムニスケート（周期 2π）

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right) = \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}(1, \sin t)$$

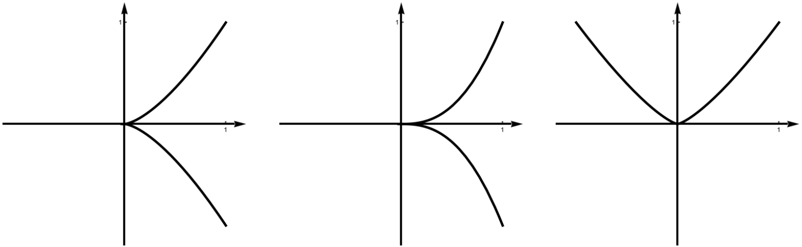
$$\dot\gamma(t) = -\frac{\sin t(2+\cos^2 t)}{(1+\sin^2 t)^2}(1, \sin t) + \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}(0, \cos t) \neq \mathbf{0}$$



$$\gamma(\pm\tfrac{\pi}{2}) = (0, 0)$$

パラメータ表示の特異点

- パラメータ表示された曲線 γ の特異点：$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ となる点．
- $\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ ということだけから曲線の形はわからない．



(t^2, t^3) (t^2, t^5) (t^3, t^4)

陰関数定理

定理 (講義資料 5; 系 5.3)

$\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が，$\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$ で

$$F(\boldsymbol{a}) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \neq 0$$

を満たしているとき，$\boldsymbol{a} \in U$ の近傍 V と $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ の近傍 W 上で定義された関数 f が存在して $\bigl\{\boldsymbol{x} \in V\,;\, F(\boldsymbol{x}) = 0\bigr\} = \bigl\{\bigl(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{w})\bigr)\,;\, \boldsymbol{w} \in W\bigr\}$，とくに $F(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{w})) = 0$ $(\boldsymbol{w} \in W)$ が成り立つ．

曲線の陰関数表示

定理 (講義資料 5; 系 5.5)

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 F に対して $S := \{(x,y)\,;\,F(x,y)=0\}$ が空集合でないとする．もしも S の各点で $dF=(F_x,F_y)\neq\mathbf{0}$ ならば，S は $\mathbb{R}^2$ の自己交叉をもたないなめらかな曲線となる．

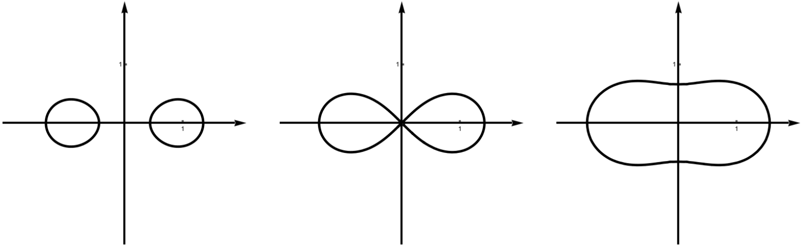
例（カッシニの橙線 Cassinian oval）

例

2 点 $(\pm 1, 0)$ からの距離の積が一定 b^2（$b > 0$）な点の集合 S_b は

$$\color{red}{F_b(x,y)} := \bigl((x-1)^2 + y^2\bigr)\bigl((x+1)^2 + y^2\bigr) - b^4$$

の零点集合（カッシニの橙線）$b \neq 1$ のときなめらかな曲線を与える．



$b = 1.2$　　　$b = 1$　　　$b = 0.9$

陰関数表示の特異点

陰関数 $F(x,y)=0$ **で与えられる** xy **平面の曲線上の点** (x_0,y_0) **が特異点であるとは，**

$$dF(x_0,y_0)=\bigl(F_x(x_0,y_0),F_y(x_0,y_0)\bigr)=\mathbf{0}$$

となることである．

Example

レムニスケート（カッシニの橙線の $b=1$ **の場合）上の点** $(0,0)$ **は特異点である．**

陰関数の微分公式

陰関数 $F(x,y)=0$ **が** y **について，** $y=f(x)$ **と書けるとき，**

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}.$$

問題

$f''(x)$ **を** F **の偏導関数で表しなさい．**

問題 5-1

問題

次は正しいか，理由をつけて答えなさい．

1. $\mathbb{R}$ **の開区間** I **上で定義された** C^∞**-級関数** $f\colon I \to \mathbb{R}$ **が** I **の各点で** $f' \neq 0$ **を満たしているとすると，**f **は単射で，**C^∞**-級の逆写像** $f^{-1}\colon f(I) \to I$ **が存在する．**
2. $\mathbb{R}^2$ **の領域** U **上で定義された** C^∞**-級写像** $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ **のヤコビ行列式が** U **の各点で零でないならば，**g **は単射で，**C^∞**-級の逆写像** $g^{-1}\colon g(U) \to U$ **が存在する．**

問題 5-2

問題

$F(x,y)=x^4+y^4-1$ とおくと，$F^{-1}(\{0\})$ は平面のなめらかな曲線を与える．この曲線の曲率は符号を変えないことを示しなさい．