

2020年10月29日(2020年11月5日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 5

お知らせ 今回は定期試験の予告を行います。次の url から授業評価をお願いします：

https://www.ks-fdcenter.net/fmane_titech/Ans?ms=t&id=titech&cd=Z4WsNGRm

前回までの訂正

- 映写資料 C: 4 ページ, 1 行目：

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{ds} \mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s) \Omega(s), \Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}$$

- 講義資料 4, 3 ページ, 定理 4.1 の証明 2 行目： $e(s) = \kappa n(s) \Rightarrow e'(s) = \kappa n'(s)$
- 講義資料 4, 3 ページ, 定理 4.6 の証明 2 行目： $b = -\tau n \Rightarrow b' = -\tau n'$

授業に関する御意見

- 配布資料の名前に回数を入れてほしいです (映写資料 4A など)。ダウンロードした際、リネームしないと見分けがつかないためです。 山田のコメント： 了解しました。ちょっと変更に時間がかかるかも。講義 web ページにあるものは日付がファイル名に含まれています。
- 授業数も半分切ってしまいましたが、山田先生は対面授業とオンライン授業はどちらがやり易いと感じていますか？ 山田のコメント： 一長一短ですね。効果は長い目で見なければならぬでしょう。
- ベクトル積については、3Q の「解析学概論第三」で触れていました。その授業の復習にもなり有難かったです。 山田のコメント： そのようですね。「力学」では習いませんでしたか？
- 次の授業は「いい肉の日 (11/29)」ですね (特に深い意味はないです...) 山田のコメント： 10 月では？
- \mathbb{R}^2 や \mathbb{R}^3 でのギロンが主なの何とかなっている。高次元になったときにもスムーズに学習したことを適用できるようにしておきたい。 山田のコメント： 一般次元でギロンできること、特定の次元でしか成り立たないことを分けて考えよう。
- 関係ない話ですが、水曜どうでしょうにおいてムンクさんが登場したのは 1999 年です。 山田のコメント： そうだったんですね。テレビのない生活を長くやっているの気づいていませんでした。
- この授業おもしろいです、とても... 山田のコメント： そう。

質問と回答

質問 1: γ_δ が特異点をもつ ($s = s_0 \Leftrightarrow \kappa(s_0)\delta = 1$) とありますが、以前、曲率半径が $1/\kappa$ と習ったときのその $1/\kappa$ と関係あるのでしょうか？ お答え： はい。法線方向に曲率半径だけ行った先では「法線が 1 点に集まる」(正確でないが)ので、平行曲線が特異点をもつ。 δ を動かしてそういう点を集めたのが縮閉線。縮閉線が「焦線」caustic とよばれるのはこういう経緯から。

質問 2: $\gamma(t)$ の縮閉線 $\sigma(t)$ が $\gamma(t)$ に一致するように計算した ($|\dot{\gamma}(t)| = 1$) その結果、 $e_\sigma(t) = (1/\kappa_\gamma(t))' n_\gamma(t)$ となり $e_\sigma(t)$ と $n_\gamma(t)$ が単位ベクトルであることから $(1/\kappa_\gamma(t))' = \pm 1$ であり $\kappa_\gamma(t) = \pm 1/t$ から $\gamma(t)$ を求めると、 $\gamma(t) = \frac{t}{2}(\sin(\log t) + \cos(\log t), \sin(\log t) - \cos(\log t))$ or $\frac{t}{2}(\cos(\log t) + \sin(\log t), \cos(\log t) - \sin(\log t))$ となるが、そのどちらも縮閉線が $\sigma(t) \rightarrow -\gamma(t) \rightarrow -\sigma(t) \rightarrow \gamma(t)$ と繰り返してになっていた。これは $\sigma(t)$ の縮閉線が $\gamma(t)$ に一致するような $\gamma(t)$ は存在しないということでしょうか？ お答え： なるほど、おもしろい例をみつけましたね。これは「対数螺旋」とよばれる曲線です。 γ と σ は合同 (かつ相似で相似の中心が原点) ですね。「存在しない」というところまでは行っていないのでは？ 実際、 t が γ と σ の共通の弧長パラメータというのは条件が強すぎると思います。

質問 3: 2 次元 (平面曲線) で扱った「 m 次接触」の考えは 3 次元 (空間曲線) にもありますか。 $\gamma(t), \gamma(u)$ に対して m 以下の任意の非負整数 r で $\gamma^{(r)}(t_0) = \tilde{\gamma}^{(r)}(u_0)$ ならば「 m 次接触」とすれば美しくまとまる気がするのですが、ただ、次元が上がっているから、平面曲線における接触の考えが、空間では空間曲面 (山田注: 曲面のこと?) の考えに対応するような気がします。

お答え： 平面曲線の場合はグラフ表示で考えましたが、それを拡張したら曲面に関する性質がでるでしょう。一方、パラメータ表示を元にすれば確かに曲線の接触が定義できますね。たとえば与えられた曲線の「2 次の接触をする円」は何でしょう。

質問 4: 3 次元での「曲率」の定義は、たとえば \mathbb{R}^3 の曲線で $z = 0$ 上にあるものと考えたとき、2 次元の曲率と一致しませんが、3 次元においても $\kappa(s)$ から曲率円や縮閉線に似たものは定義できますか？ (空間の曲線に球をあてがうのは無理そうに思います)。

お答え： やはり球面ではなくて、円を接触させたいですね。曲率円の定義をどうすればよいか考えてご覧下さい。

質問 5: 弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma, \tilde{\gamma}$ について、共通の曲率と捩率を持つならば、平面曲線のとくと同様に回転と平行移動で γ と $\tilde{\gamma}$ は移りあうことがいえ、曲率と捩率は似ているように感じました。この捩率とは曲線におけるどのような量を表しているのでしょうか。また、以前、曲率はパラメータ変換により不変であることを示しましたが、この捩率もパラメータ変換によって不変なのでしょう。 お答え： 捩率の意味：接触平面 (e と n が張る平面) から「どれだけ遠ざかるか」。パラメータ不変性：ここでは平面曲線の場合と違って弧長パラメータという条件のもとで定義している。一般のパラメータ t では弧長 s にパラメータ変換して捩率を求めて t で置き換える。したがって定義からパラメータ不変性は明らか。

質問 6: 講義資料 3 で単位接ベクトル $e(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ と定めているのですが、講義資料 4 で単位接ベクトルは $* (s) = \gamma'(s)$ となっており 2 つの違いを教えてください。 お答え： 弧長パラメータか否か (ステートメントにそう書いてある)。

質問 7: 問題 4-1 について捩率が 0 になる時というのは図形的にはどのような時ですか？ お答え： 接触平面に接する。

質問 8: 平面曲線において曲率が正なら左回り、曲率が負なら右回りであったように、捩率の正負のよって分かる空間曲線の特徴は何かあるのでしょうか。 お答え： 接触平面からどちら側に離れていくかが τ の符号。

質問 9: なぜ平面における曲率は方向の変化率なのに、空間における曲率は加速度ベクトルの大きさになるのですか？

お答え： 方向の変化率がスカラーではないから (実際、加速度ベクトル自体が「方向の変化率」)。

質問 10: 平面曲線の曲率の定義として $\kappa = \det(\gamma', \gamma'')$ を採用していたのは何故でしょうか？ $\kappa = |\gamma''|$ を曲率の定義としたほうが

- 首尾一貫している気がしますし、実際テキストでは $\dot{\gamma}/n (= |\dot{\gamma}|)$ を曲率の定義にしているので気になってしまいました。
- お答え: γ''/n は符号付きスカラーなので単純に $|\gamma''|$ ではない。平面曲線の曲率は符号付きで定義できるので、この形が自然。
- 質問 11: フルネ・セレの公式における $\Omega(s)$ を \mathcal{F} の微分の計算から求めると、 Ω が交代行列になるのは図形的理由があるのですか？
- お答え: 問題 4-2 の (4) から、直交群のリーマン環は交代行列からなる線型空間である、ということ。
- 質問 12: 問 4-2 の (2) において ι は $\mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Alt}(3, \mathbb{R})$ の全単射で $\iota(x \times y) = [\iota(x), \iota(y)]$ から ι は群の同型写像のような性質を満たしていると思います。しかし \mathbb{R}^3 と外積、 $\text{Alt}(3, \mathbb{R})$ と交換子に対し、どちらも単位元、逆元の存在はいえませんが、結合法則は満たしません。この ι の対応は何か特別な名称があるのでしょうか。お答え: 本当に単位元、逆元がありますか? ($\text{Alt}(3, \mathbb{R}), [\]$) は群とは違う「リー代数」という構造をもっています。同様に (\mathbb{R}^3, \times) もリー代数。これらがリー代数として同型。
- 質問 13: \mathbb{R}^3 では外積を定義することができますが、外の次元ではなぜ外積のような、回転のような演算を考えないのでしょうか。
- お答え: 文の意味が読み取れません。「外の次元」(そとのじげん、と読む?) や「外積のような回転のような」とは?
- 質問 14: 授業内では $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ におけるフルネ枠扱いましたが \mathbb{R}^n ($n \geq 4$) 内でも同様にフルネ枠を定義するには曲率、捩率に続く量を用意する必要があると思います。自分も考えてみましたが「拡張の際に保存される性質は何か?」という段階で手が止まってしまいました。もし \mathbb{R}^n ($n \geq 4$) でもフルネ枠が定義されるようでしたら、曲率・捩率に続く量の構成法をご教示頂きたいです。
- 質問 15: 問題 4-2 の 4 問目で「区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\text{SO}(n)$ への C^∞ -級写像 \mathcal{F} に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ は交代行列」とありましたが、一般の n 次元においてフルネ枠は定義できますか? (3 次元のときはベクトル積を使って定義されているので n 次元への拡張はできないかと思いました)
- 質問 16: 一般次元では外積が定義ないため(原文ママ) e, n が決まっても他のベクトルを決定するのは難しいように思います。 d 次元 ($d \geq 4$, d 次元では外積が定義できない) でフルネ・セレの公式 $\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s)$ をみたく $\Omega(s)$ は存在しますか? また存在するときいくつか存在しますか? (一意, 有限個・無限個など)
- 質問 17: 今回の問題の 4 番で $\text{SO}(n)$ というものを考えていましたが、 $n \geq 4$ のものについてフルネ枠を考えることはできますか。
- 質問 18: $n \in \mathbb{N}$ とするとき \mathbb{R}^n の曲線についてフルネ枠をとることができるのか。
- お答え: 高次元のフルネ枠、フルネ方程式は例えば、幾何学概論第一講義資料 6 (2019 年度) の 2 ページ。
- 質問 19: 今まで 2, 3 次元について考察していますが、より高次元の幾何を考えることはありますか? いままでの議論だと曲率等の概念は 3 次元でもそのまま拡張されていますが、高次元の幾何を考える際には曲率等の量もそのまま拡張されるのですか? さらにフルネ・セレの公式における Ω について 2 次元の幾何を考える際に登場する量は曲率、3 次元の幾何を考える際に登場する量は曲率と捩率、より高次元の幾何を考える際に登場する(であろう)量にはどのような意味がありますか? お答え: 「高次元の幾何」という大きな言葉がおかしい。高次元ユークリッド空間の曲線論では? 平面曲線から空間曲線へは「そのまま拡張」されますか? 「曲率と捩率ですが、... どのような意味がありますか?」も不思議。曲率と捩率の意味は分かっているという前提?
- 質問 20: 3 次元曲線においては曲率のみでは一意に曲線をきめられないということなのでしょう。
- お答え: はい。「3 次元曲線」って変ですね。曲線は(高次元空間にはいっていても)1 次元的な図形(1 次元部分多様体)です。
- 質問 21: フルネ・セレの公式を n 次元に拡張することを考えたとき、例えば 4 次元では
- $$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} e \\ n \\ b \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \tau' \\ 0 & 0 & -\tau' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ n \\ b \\ b' \end{pmatrix}$$
- なる b', τ' に相当する量を導入することになると思いますが、これらを定義する一般的な方法はありますか? rot は 3 次元でしか定義されないでその拡張は思いつきませんでした。お答え: rot とどう関係があるのでしょうか。
- 質問 22: 問題 4-2 で \mathbb{R}^n のフルネ枠を考えているので、 \mathbb{R}^n でも曲線を考えると思うのですが、つまき線やサイクロイドと同じように有名な曲線はあるのでしょうか? お答え: あまり知らない。問題で考えているのは \mathbb{R}^n のフルネ枠でなく $\text{SO}(n)$ 値関数。
- 質問 23: 4 次において $F(s) = (e(s), n(s), b(s), c(s))$ となるとと思いますが、 $c(s)$ に名前がありますか?
- お答え: 4 次って何? 多項式の次数?
- 質問 24: \mathbb{R}^n 空間(原文ママ: こういう用語あるの?) で曲線 $\gamma(t)$ の曲率は $|\gamma'(t)|^{-\frac{1}{2}n(n+1)} \det(\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(n)})$ となりますか?
- お答え: まずは $n = 3$ で正しくない(曲率が加加加速度に依存するように見える)。
- 質問 25: 一般の m 次直交空間(原文ママ: 何のこと?) における閉曲線のガウス写像は定義できますか? また、全曲率とどのような関係を持ちますか? お答え: 独りよがりの用語を使わないでください。ガウス写像は $\gamma': I \rightarrow S^{m-1}$ (S^{m-1} は $m-1$ 次元球面)として平面曲線と同様に定義できます。全曲率はその像の弧長。
- 質問 26: 空間内の閉曲線についても平面上の閉曲線のように「回転数」というのは定義されているのでしょうか。個人的には問題 4-1 のように正射影を考えて、それについての回転数が空間内の閉曲線の「回転数」になるかと思ったのですが、射影をとる平面によって回転数が変わるのではと考えています。お答え: 問題 4-1 のように射影をとると特異点ができることもありますね。
- 質問 27: 空間曲線の捩率は材料力学などのねじれと関係ありますか? お答え: ありません(ちょっと紛らわしいが)。
- 質問 28: フルネ枠は像が行列な写像ですが、問 4-2 のように行列として扱うのでしょうか? お答え: 意味がわからない。各点での値は行列なので「として扱う」のではなく行列ですよ。指数関数は像が実数な写像だが、実数として扱うのか」という文と同じ。
- 質問 29: 問題 4-2 にでてきた \mathcal{F} は平面曲線や空間曲線のフルネ枠のように n 次の列ベクトルを並べる形で書けますか?
- お答え: 一般に行列は列ベクトルを並べた形ではないでしょうか。
- 質問 30: 問題 4-2 (4) の \mathcal{F}^{-1} とは「写像 \mathcal{F} の逆像」ではなく「直交行列の逆行列」という意味でとらえていますが、あっていすか? お答え: 文脈で考えてみよう。もし「逆像」だったとして、それと \mathcal{F} を「かける」というのはどういう意味でしょう。 $\mathcal{F}: I \rightarrow \text{SO}(n)$ なので、逆像は I の部分集合。

5 陰関数定理

逆写像定理 \mathbb{R}^n の領域 U から \mathbb{R}^n への写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ の点 $\mathbf{a} \in U$ におけるヤコビ行列式*1とは

$$(5.1) \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a}) = \det \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \right)_{j,k=1, \dots, n}$$

で定まるスカラーのことである。ただし $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$ は U の座標, $y_j(x_1, \dots, x_n)$ ($j = 1, \dots, n$) は $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))$ で与えられる U 上の C^∞ -級関数である。

定理 5.1 (逆写像定理). n を正の整数とする。 \mathbb{R}^n の領域 U で定義された C^∞ -級写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ のヤコビ行列式が $\mathbf{a} \in U$ で零でないとする。ある \mathbf{a} の近傍 V が存在して次を満たす:

- $f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ は単射,
- $(f|_V)^{-1}: f(V) \rightarrow U$ は C^∞ -級。

陰関数定理

定理 5.2 (陰関数定理). 正の整数 n, r が $n > r$ を満たしているとする。 \mathbb{R}^n の領域 U 上で定義された C^∞ -級写像 $F: U \rightarrow \mathbb{R}^r$ が, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$ で

$$F(\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial (y_1, \dots, y_r)}{\partial (x_1, \dots, x_r)}(\mathbf{a}) \neq 0$$

を満たしているとする。ただし $F(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_r(x_1, \dots, x_n))$ と表している。このとき, $\mathbf{a} \in U$ の近傍 V と (a_{r+1}, \dots, a_n) の \mathbb{R}^{n-r} における近傍 W , C^∞ -級写像 $f: W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ が存在して, 次が成り立つ:

$$F^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \cap V = \{\mathbf{x} \in V; F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{(f(\mathbf{w}), \mathbf{w}); \mathbf{w} \in W\} \quad \text{とくに} \quad F(f(\mathbf{w}), \mathbf{w}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{w} \in W).$$

系 5.3. \mathbb{R}^n の領域 U 上で定義された C^∞ -級関数 $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ が, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$ で

$$F(\mathbf{a}) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$$

を満たしているとき, $\mathbf{a} \in U$ の近傍 V と $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ の近傍 W 上で定義された関数 f が存在して $\{\mathbf{x} \in V; F(\mathbf{x}) = 0\} = \{(w, f(w)); w \in W\}$, とくに $F(w, f(w)) = 0$ ($w \in W$) が成り立つ。

陰関数の微分 簡単のため, 系 5.3 の $n = 2$ の場合を考える。

命題 5.4. \mathbb{R}^2 の領域 U 上で定義された C^∞ -級関数 $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ が, $(a, b) \in U$ で $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ を満たしているとき, (a, b) の近傍 V と a を含む開区間 I 上で定義された関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\{(x, y) \in V; F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)); x \in I\}$, とくに $F(x, f(x)) = 0$ 。さらに,

$$(5.2) \quad f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

が成り立つ。

証明. 前半は系 5.3 そのもの. 後半は $F(x, f(x))$ を x で微分して

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, f(x)) = F_x(x, f(x)) + f'(x)F_y(x, f(x))$$

から従う. □

関数 f の高次の導関数は (5.2) を x で微分すれば得られる.

陰関数で表示された曲線 命題 5.4 の仮定のもと, (a, b) の近傍で $F(x, y) = 0$ を満たす点全体は, なめらかな関数 $y = f(x)$ のグラフで表される. もしも $F_y(a, b) = 0$ であっても $F_x(a, b) \neq 0$ ならば, x と y の役割を交換すれば, $F(x, y) = 0$ は $x = g(y)$ とグラフ表示されることがわかる.

系 5.5. \mathbb{R}^2 の領域 U で定義された C^∞ -級関数 F に対して $S := \{(x, y); F(x, y) = 0\}$ が空集合でないとする. もしも S の各点で $dF = (F_x, F_y) \neq 0$ ならば, S は \mathbb{R}^2 の自己交叉をもたないなめらかな曲線となる.

定義 5.6. 平面曲線が 2 変数関数 $F(x, y)$ の零点集合として表されているとき, この表示を曲線の陰関数表示とよぶ. とくに $(F_x, F_y) = 0$ となるような点を, この陰関数表示の特異点という.

注意 5.7. パラメータ表示の特異点と陰関数表示の特異点の違いに注意せよ. テキスト 6 ページ参照.

例 5.8. 平面上の 2 点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$ からの距離の積が一定 b^2 ($b > 0$) であるような点の集合 S_b は

$$F_b(x, y) := ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) - b^4$$

の零点集合である. $(F_b)_x(x, y) = (F_b)_y(x, y) = 0$ が成り立つのは $(x, y) = (-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ のときなので, $b > 0$ に注意すれば, $b \neq 1$ のとき, S_b は自己交叉をもたないなめらかな曲線となる. この曲線をカッシニの楕線^{*2}とよぶ.

一方, $b = 1$ のとき, S_1 は $(0, 0)$ に特異点をもつ. この曲線はレムニスケート^{*3}とよばれ,

$$\gamma(t) = \frac{\sqrt{2} \cos t}{1 + \sin^2 t} (1, \sin t)$$

と周期 2π の閉曲線としてパラメータ表示できる. このとき, 点 $(0, 0)$ に対応する点は $t = \pm\pi/2$ となる点で, この点はパラメータ表示の特異点ではない.

問題

5-1 次は正しいか, 理由をつけて答えなさい.

- (1) \mathbb{R} の開区間 I 上で定義された C^∞ -級関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が I の各点で $f' \neq 0$ を満たしているとする. f は単射で, C^∞ -級の逆写像 $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ が存在する.
- (2) \mathbb{R}^2 の領域 U 上で定義された C^∞ -級写像 $g: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列式が U の各点で零でないならば, g は単射で, C^∞ -級の逆写像 $g^{-1}: g(U) \rightarrow U$ が存在する.

5-2 $F(x, y) = x^4 + y^4 - 1$ とおくと, $F^{-1}(\{0\})$ は平面的なめらかな曲線を与える. この曲線の曲率は符号を変えないことを示しなさい.

^{*2} カッシニの卵形線とも呼ばれる. the Cassinian oval.

^{*3} レムニスケート: the lemniscate.