幾何学概論第一 (MTH.B211)

5: 陰関数定理（補足）

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/11/05

問題 5-1

問題

次は正しいか，理由をつけて答えなさい．

1. $\mathbb{R}$ の開区間 I 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が I の各点で $f' \neq 0$ を満たしているとすると，f は単射で，C^∞-級の逆写像 $f^{-1}\colon f(I) \to I$ が存在する．
2. $\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像 $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列式が U の各点で零でないならば，g は単射で，C^∞-級の逆写像 $g^{-1}\colon g(U) \to U$ が存在する．

定理 (逆写像定理)

$\mathbb{R}^n$ の領域 U 上の C^∞-級写像 $\boxed{\boldsymbol{f}\colon U \to \mathbb{R}^n}$ のヤコビ行列式が $\boldsymbol{a} \in U$ で零でないなら，次のような $\boldsymbol{a}$ の近傍 V が存在する：

- $\boldsymbol{f}|_V\colon V \to \mathbb{R}^n$ は単射，
- $(\boldsymbol{f}|_V)^{-1}$ は C^∞-級．

問題 5-1

問題

次は正しいか，理由をつけて答えなさい．

1. $\mathbb{R}$ の開区間 I 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が I の各点で $f' \neq 0$ を満たしているとすると，f は単射で，C^∞-級の逆写像 $f^{-1}\colon f(I) \to I$ が存在する．

中間値．

正しい：必要なら f を $-f$ に取り替えて $f' > 0$ としてよい．

- $f' > 0$ から f は I 上単調増加なので，f は単射． 平均値
- f は連続だから $I' := f(I)$ は $\mathbb{R}$ の区間． 中間値．
- 任意の $y_0 \in I'$ に対して $f(x_0) = y_0$ となる $x_0 \in I$ がただ一つ存在する：$f^{-1}\colon I' \to I$ が存在
  $f'(x_0) \neq 0$ なのでこの点の近傍で逆写像定理が適用できる：
  逆写像は y_0 の近傍で C^∞-級．
  y_0 は任意だったから f^{-1} は I' で C^∞-級． 局所的

問題

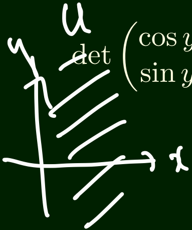
次は正しいか，理由をつけて答えなさい．

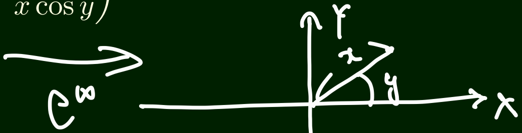
2. $\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像 $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列式が U の各点で零でないならば，g は単射で，~~C^∞-級の逆写像 $g^{-1}\colon g(U) \to U$ が~~存在する．

写像 $g\colon U := \{(x,y)\,;\, x>0\} \ni (x,y) \longmapsto (x\cos y, x\sin y) \in \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列式は

X　Y

$$\det\begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix} = x > 0 \qquad \text{on } U.$$





2π-periodic in y

問題 5-2

問題

$F(x,y) = x^4 + y^4 - 1$ とおくと，$F^{-1}(\{0\})$ は平面のなめらかな曲線を与える．この曲線の曲率は符号を変えないことを示しなさい．

事実

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 F に対して $S := \{(x,y)\,;\, F(x,y) = 0\}$ が空集合でないとする．もしも S の各点で $dF = (F_x, F_y) \neq \mathbf{0}$ ならば，S は $\mathbb{R}^2$ の自己交叉をもたないなめらかな曲線となる．

- $(F_x, F_y) = 4(x^3, y^3) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.
- $F(0,0) = -1 \neq 0$. i.e. $(0,0) \notin S$

$$(F_x, F_y) \neq \mathbf{0} \qquad \text{on} \qquad S := \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}.$$

問題 5-2

Q

「符号を変えない」とは 0 になる場合も含むのでしょうか.

A

はい.

Q

5-2 で局所的 $\gamma(t) = (t, f(t))$ とみると，κ の正負が f'' と一致するのは計算できたのですが，これだと常に x 軸正を向くのでおかしい．今回のような形なら具体的な形や対称性に依存した議論から解決できそうだが，一般の $F(x, y) = 0$ で表される曲線についてはどうか？

A

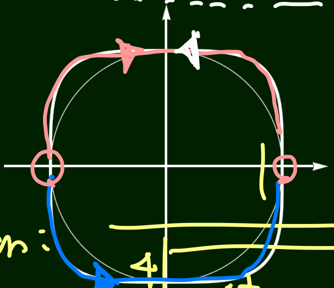
向きが一意的に定まらない可能性があるので一般には無理.

問題 5-2

問題

$F(x,y) = x^4 + y^4 - 1$ とおくと，$F^{-1}(\{0\})$ は平面のなめらかな曲線を与える．この曲線の曲率は符号を変えないことを示しなさい．

- 極座標 (r,θ) を用いると $r = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}$.



$r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta = 1$

Parametrization: $\dfrac{(\cos t, \sin t)}{\sqrt[4]{\cos^4 t + \sin^4 t}}$

問題 5-2

事実

グラフ $y = f(x)$ の曲率関数は，曲線の向きを x が増加する向きにとれば，次で与えられる：

$(x, f(x))$

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3}.$$

証明.

$\gamma(x) = \big(x, f(x)\big)$ とおけば

$$\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(x) & f''(x) \end{pmatrix} = f''(x),$$

$$|\dot{\gamma}(x)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

□

問題 5-2

補題

陰関数 $F(x,y)=0$ で与えられる曲線が $y=f(x)$ とグラフ表示されているとき，x が増加する方向に曲線の向きをとれば，点 (x,y)（$F(x,y)=0$）における曲線の曲率 κ は

$(F_y \neq 0)$

$$\kappa = -\epsilon\frac{F_y^2F_{xx}-2F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}} \qquad (\epsilon = \operatorname{sgn} F_y) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

F_y の符号

とくに

$$|\kappa| = \frac{|F_y^2F_{xx}-2F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}|}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}.$$

問題 5-2

x が増加する向きに関して

$$F(x,y)=0 \quad \text{の曲率：} \quad \kappa = -(\operatorname{sgn} F_y)\frac{F_y^2F_{xx}-2F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}.$$

$y=f(x) \qquad F(x,f(x))=0$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y}$

$f''(x) = -\frac{(F_{xx}+f'(x)F_{xy})F_y - F_x(F_{xy}+f'(x)F_{yy})}{F_y^2}$

$= -\frac{F_y^2F_{xx}-2F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}}{F_y^3}$

$$\sqrt{1+f'(x)^2}^{\,3} = \sqrt{1+\frac{F_x^2}{F_y^2}}^{\,3}$$

$$= \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2}^{\,3}}{|F_y|^3}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$K = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}^{\,3}} = \frac{-F_y^2F_{xx}+2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}^{\,3}} \times \frac{|F_y^3|}{F_y^3}$$

ε

問題 5-2

x が増加する向きに関して

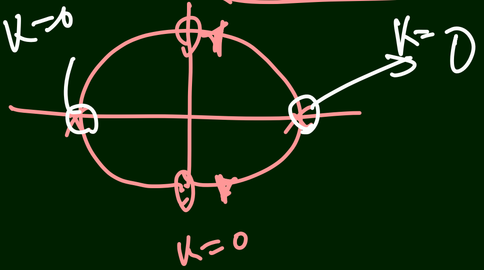
$$\boxed{x^4 + y^4 = 1}$$

$$F(x, y) := x^4 + y^4 - 1 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{-\operatorname{sgn}(y) 3x^2 y^2}{\sqrt{x^6 + y^6}^3}$$

- $y > 0$ では x が減少する向きなので $\kappa = 3x^2y^2/\sqrt{x^6+y^6}^3$. ≥ 0
- $y < 0$ では x が増加する向きなので $\kappa = 3x^2y^2/\sqrt{x^6+y^6}^3$. ≥ 0
- $y = 0$ では？

κ: 連続

$y \to 0$: 極限



問題 5-2

x が増加する向きに関して

$$F(x,y) := x^4 + y^4 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = \frac{-\operatorname{sgn}(y) 3x^2y^2}{\sqrt{x^6+y^6}^3}$$

- $y > 0$ では x が減少する向きなので $\kappa = 3x^2y^2/\sqrt{x^6+y^6}^3$.
- $y < 0$ では x が増加する向きなので $\kappa = 3x^2y^2/\sqrt{x^6+y^6}^3$.
- $y = 0$ では？

問題 5-2

x が増加する向きに関して

$$F(x,y) := x^4 + y^4 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = \frac{-\operatorname{sgn}(y) 3x^2y^2}{\sqrt{x^6+y^6}^3}$$

- $y > 0$ では x が減少する向きなので $\kappa = 3x^2y^2/\sqrt{x^6+y^6}^3$.
- $y < 0$ では x が増加する向きなので $\kappa = 3x^2y^2/\sqrt{x^6+y^6}^3$.
- $y = 0$ では？