幾何学概論第一 (MTH.B211)

6: 空間曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/11/05

目標

torsion

die Krümmung

curvature

定理 (空間曲線の基本定理) $\boxed{\kappa > 0}$

区間 J で定義された正の値をとる C^∞-級関数 κ と実数値 C^∞-関数 τ に対して，弧長をパラメータとする空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で曲率が κ，捩率が τ となるものが存在する．さらに，このような曲線は，変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ （$A \in \mathrm{SO}(3)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

平面曲線 $\kappa : J \to \mathbb{R}$ C^∞

$\Rightarrow$ • $\exists \gamma : J \to \mathbb{R}^2$ parametrized by the arc length with curvature κ

Frenet $\rightarrow$ • ~~unique~~ $\exists ! \gamma$ ~~up~~ to rotations & translations

常微分方程式

1変数

- 未知関数 $y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ に関する関係式

$(y')^2 = y^3$

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), \ldots, y_m(t)) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

正規形でない

を正規形の常微分方程式という．ただし f_i $(i = 1, \ldots, m)$ は $m+1$ 変数の C^∞-級関数.

- とくに f_i が $y_1, \ldots, y_m$ に関する 1 次式，すなわち

$$y_i' = a_{i1}(t)y_1 + \cdots + a_{im}(t)y_m + b_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

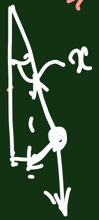
の形の方程式を線型の常微分方程式という．ただし a_{ij}, b_i $(i, j = 1, \ldots, m)$ は $m+1$ 変数の C^∞-級関数.

例

例

一様な重力加速度 g のもとでの長さ l の単振り子の鉛直下向き~~報告~~からの偏角 $x = x(t)$ は

方向



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x, \qquad \omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$$

を満たす（ニュートンの運動方程式）．この式は

$$x'(t) = y(t), \qquad y'(t) = -\omega^2 \sin x(t)$$

と書けるので，未知関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する正規形の常微分方程式である．

例

例

ばね定数 k のばねに質量 m のおもりをつけて振動させたとき，ばねの平衡点からの変位 $x = x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \qquad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

を満たす（ニュートンの運動方程式）．この式は

$$x'(t) = y(t), \qquad y'(t) = -\omega^2 x(t)$$

1次

と書けるので，未知関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する線型常微分方程式である．

常微分方程式論の基本定理

定理

開区間 $J \subset \mathbb{R}$ と領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ に対して，C^∞-級写像 $\boldsymbol{F}\colon J \times U \to \mathbb{R}^m$ と $t_0 \in J$，$\boldsymbol{x} \in U$ が与えられているとき，t_0 を含む十分小さい区間 $J' \subset J$ で定義された C^∞-級写像 $\boldsymbol{f}\colon J' \to \mathbb{R}^m$ で

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}(t) = \boldsymbol{F}(t; \boldsymbol{f}(t)), \qquad \boxed{\boldsymbol{f}(t_0) = \boldsymbol{x}} \tag{1}$$

初期条件

を満たすものがただ一つ存在する．さらに，(1) を満たす $\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{x}$ に依存するので，それを $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ と書くと，$(t, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は C^∞-級写像である．

正規形の常微分方程式の初期値問題は
ちゃんととける．

線型常微分方程式の基本定理

定理

開区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上の C^∞-級関数 $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ $(i, j = 1, \dots, m)$ と $t_0 \in J$, $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ に対して,

$$\begin{cases} y_i' = a_{i1}(t)y_1 + \cdots + a_{im}(t)y_m + b_i(t), \\ y_i(t_0) = x_i, \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m)$$

初期条件

を満たす C^∞-級関数 $y_i \colon J \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ がただ一組存在する.

線型常微分方程式の初期値問題は

ずっと とける

例

例

関数 φ を区間 J $(\ni t_0)$ で定義された C^∞-級関数とするとき,

- $y' = \varphi(t)y$, $y(t_0) = 1$ の唯一の解は

線型

$y' = \varphi(t)\cdot y$

$$y(t) = \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(u)\,du.$$

$y(t_0) = 1$

.

- $y' = \varphi(t)(1 + y^2)$, $y(t_0) = 0$ の唯一の解は

$$y(t) = \tan \underbrace{\int_{t_0}^{t} \varphi(u)\,du}_{\psi}.$$

$(\tan\psi)' = \psi'(1+\tan^2\psi) = \varphi\,(1+y^2)$

$\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(u)\,du\right|$ が $\frac{\pi}{2}$ 以上になると解が発散する

行列値関数の微分方程式

既知の C^∞-級行列値関数 $\Omega(t)$ に対して，未知の行列値関数 $\mathcal{F}$ に関する常微分方程式の初期値問題

known

$\mathcal{F}: J \to$ 行列

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \mathcal{F}(t)\Omega(t) \qquad \mathcal{F}(t_0) = A \qquad (2)$$

初期条件

は線型常微分方程式． $\Rightarrow$ 解の存在は保証されている．

補題

行列値関数 Ω が交代行列に値をとり，$A \in \mathrm{SO}(n)$ ならば (2) をみたす $\mathcal{F}$ は $\mathrm{SO}(n)$ に値をとる．

$\mathcal{F}(t) \in SO(n)$

証明.

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{F}\,{}^t\mathcal{F}) = \mathcal{F}'\cdot{}^t\mathcal{F} + \mathcal{F}\,{}^t\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega\,{}^t\mathcal{F} + \mathcal{F}\,{}^t(\mathcal{F}\Omega)$$

$$= \mathcal{F}(\Omega + {}^t\Omega)\,{}^t\mathcal{F} = 0 \qquad \mathcal{F}\,{}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}(t_0)\,{}^t\mathcal{F}(t_0) = A\cdot{}^tA = I \quad \square$$

$\det \mathcal{F} = \det A = 1$ $\Leftarrow$ $\det = \pm 1$ $\Leftarrow$ $O(n)$

空間曲線の基本定理

定理

区間 J で定義された正の値をとる C^∞-級関数 κ と実数値 C^∞-関数 τ に対して，弧長をパラメータとする空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で曲率が κ，捩率が τ となるものが存在する．さらに，このような曲線は，変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ （$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

一意性の証明： $\gamma, \tilde\gamma$: 同じ κ, τ を持つ．

$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}, \tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{b}})$: Frenet 標構

とくに $\boldsymbol{e} = \gamma'$　$\tilde{\boldsymbol{e}} = \tilde\gamma'$

Frenet Serret

次

$\Rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$　$\tilde{\mathcal{F}}' = \tilde{\mathcal{F}}\Omega$　$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$

$(\tilde{\mathcal{F}}\,{}^t\mathcal{F})' = O$　$\mathrm{SO}(3)$　$\tilde{\mathcal{F}} = A\mathcal{F}$　$\tilde{\boldsymbol{e}} = \tilde\gamma' = A\boldsymbol{e} = A\gamma'$

Ω : 交代

空間曲線の基本定理

定理

区間 J で定義された正の値をとる C^∞-級関数 κ と実数値 C^∞-関数 τ に対して，弧長をパラメータとする空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で曲率が κ，捩率が τ となるものが存在する．

存在の証明：

Frenet Serret

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s), \quad \mathcal{F}(s_0) = I \leftarrow \text{単位行列}$$

$$\left(\Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}\right) \text{交代}$$

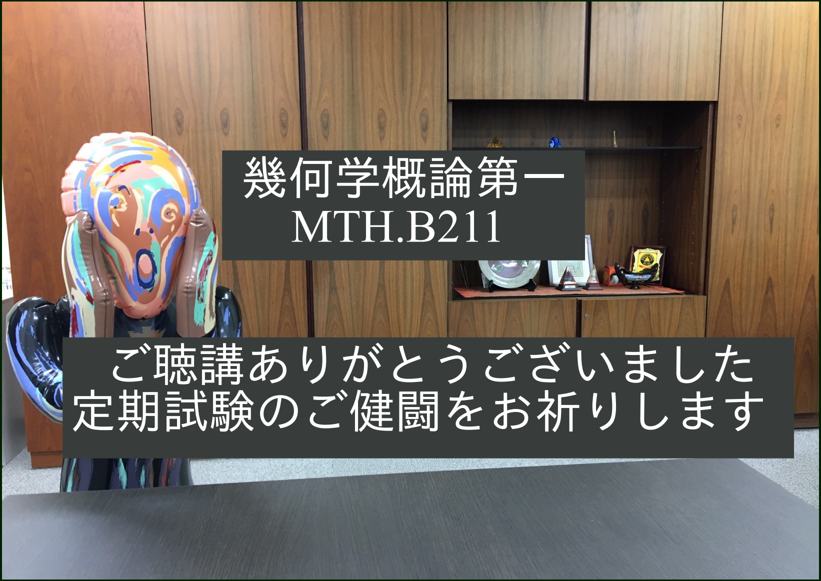
単位. γ'

の解を $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ として

$\mathcal{F}\colon J \to SO(3)$

$$\gamma(\overset{s}{t}) := \int_{t_0 \to s_0}^{t \to s} \boldsymbol{e}(u)\, du$$

とおくと，これが求めるものである．


幾何学概論第一
MTH.B211
ご聴講ありがとうございました
定期試験のご健闘をお祈りします