幾何学概論第一 (MTH.B211)

6: 空間曲線の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/11/05

目標

定理 (空間曲線の基本定理)

区間 J で定義された正の値をとる C^∞-級関数 κ と実数値 C^∞-関数 τ に対して，弧長をパラメータとする空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で曲率が κ，捩率が τ となるものが存在する．さらに，このような曲線は，変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ （$A \in \mathrm{SO}(3)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

常微分方程式

- 未知関数 $y_i(t)$ $(i = 1, \dots, m)$ に関する関係式

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

  を正規形の常微分方程式という．ただし f_i $(i = 1, \dots, m)$ は $m+1$ 変数の C^∞-級関数．
- とくに f_i が y_1, …, y_m に関する 1 次式，すなわち

$$y_i' = a_{i1}(t)y_1 + \dots + a_{im}(t)y_m + b_i(t) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

  の形の方程式を線型の常微分方程式という．ただし a_{ij}, b_i $(i, j = 1, \dots, m)$ は $m+1$ 変数の C^∞-級関数．

例

例

一様な重力加速度 g のもとでの長さ l の単振り子の鉛直下向き報告からの偏角 $x = x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x, \qquad \omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$$

を満たす（ニュートンの運動方程式）．この式は

$$x'(t) = y(t), \qquad y'(t) = -\omega^2 \sin x(t)$$

と書けるので，未知関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する正規形の常微分方程式である．

例

例

ばね定数 k のばねに質量 m のおもりをつけて振動させたとき，ばねの平衡点からの変位 $x = x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \qquad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

を満たす（ニュートンの運動方程式）．この式は

$$x'(t) = y(t), \qquad y'(t) = -\omega^2 x(t)$$

と書けるので，未知関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する線型常微分方程式である．

常微分方程式論の基本定理

定理

開区間 $J \subset \mathbb{R}$ と領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ に対して，C^∞-級写像 $\boldsymbol{F}\colon J \times U \to \mathbb{R}^m$ と $t_0 \in J$，$\boldsymbol{x} \in U$ が与えられているとき，t_0 を含む十分小さい区間 $J' \subset J$ で定義された C^∞-級写像 $\boldsymbol{f}\colon J' \to \mathbb{R}^m$ で

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}(t) = \boldsymbol{F}(t; \boldsymbol{f}(t)), \qquad \boldsymbol{f}(t_0) = \boldsymbol{x} \tag{1}$$

を満たすものがただ一つ存在する．さらに，(1) を満たす $\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{x}$ に依存するので，それを $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ と書くと，$(t, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は C^∞-級写像である．

線型常微分方程式の基本定理

定理

開区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上の C^∞-級関数 $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ $(i, j = 1, \dots, m)$ と $t_0 \in J$, $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ に対して，

$$\begin{cases} y_i' = a_{i1}(t)y_1 + \dots + a_{im}(t)y_m + b_i(t), \\ y_i(t_0) = x_i, \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m)$$

を満たす C^∞-級関数 $y_i\colon J \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ がただ一組存在する．

例

例

関数 φ を区間 J $(\ni t_0)$ で定義された C^∞-級関数とするとき，

- $y' = \varphi(t)y$, $y(t_0) = 1$ の解は

$$y(t) = \exp \int_{t_0}^t \varphi(u)\,du.$$

  .
- $y' = \varphi(t)(1 + y^2)$, $y(t_0) = 0$ の解は

$$y(t) = \tan \int_{t_0}^t \varphi(u)\,du.$$

行列値関数の微分方程式

既知の C^∞-級行列値関数 $\Omega(t)$ に対して，未知の行列値関数 $\mathcal{F}$ に関する常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \mathcal{F}(t)\Omega(t) \qquad \mathcal{F}(t_0) = A \tag{2}$$

は線型常微分方程式．$\Rightarrow$ 解の存在は保証されている．

補題

行列値関数 Ω が交代行列に値をとり，$A \in \mathrm{SO}(n)$ ならば (2) をみたす $\mathcal{F}$ は $\mathrm{SO}(n)$ に値をとる．

証明.

$\frac{d}{dt}(\mathcal{F}^t\mathcal{F}) =$

. $\square$

空間曲線の基本定理

定理

区間 J で定義された正の値をとる C^∞-級関数 κ と実数値 C^∞-関数 τ に対して，弧長をパラメータとする空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で曲率が κ，捩率が τ となるものが存在する．さらに，このような曲線は，変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ （$A \in \mathrm{SO}(3)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

一意性の証明：

空間曲線の基本定理

定理

区間 J で定義された正の値をとる C^∞-級関数 κ と実数値 C^∞-関数 τ に対して，弧長をパラメータとする空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で曲率が κ，捩率が τ となるものが存在する．

存在の証明：

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s), \quad \mathcal{F}(s_0) = I$$

$$\left(\Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}\right)$$

の解を $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ として

$$\gamma(t) := \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{e}(u)\,du$$ とおくと，これが求めるものである．