2020 年 11 月 5 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 6

■お知らせ

- 27 名の方から課題の提出がありました．本日の課題はありません．
- 次回の定期試験にあたって「誓約書」の提出が必要です．T2SCHOLA の「定期試験」という名前の課題に誓約書のフォーマットがありますので，自署した pdf ファイルを課題と同様にアップロードしてください．定期試験の問題は誓約書へのフィードバックとしてお渡しします．
- 授業評価にご協力ください．
  `https://www.ks-fdcenter.net/fmane_titech/Ans?ms=t&id=titech&cd=Z4WsNGRm`

■前回までの訂正

- 第 5 回 映写資料 A，8 ページ下から 2 行目：$\kappa_{n-1} := -\boldsymbol{e}_n'\boldsymbol{e}_{n-1} \Rightarrow \kappa_{n-1} := -\boldsymbol{e}_n' \cdot \boldsymbol{e}_{n-1}$
- 第 5 回 映写資料 B，8 ページ「事実」の 2 行目：$\hat{\sigma}(s_0) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \hat{\sigma}'(s_0) = \boldsymbol{0}$
- 第 5 回 映写資料 B，12 ページ下から 4 行目：${}^tAB = {}^tB\,{}^tA \Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
- 第 5 回 映写資料 B，13 ページ下から 2 行目：$\iota\boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \iota(\boldsymbol{e}_3)$
- 第 5 回 映写資料 C，3 ページ，2 項：$\mathbb{R}^2$ の区間 $J \Rightarrow \mathbb{R}$ の区間 J
- 第 5 回 映写資料 C，10 ページ，例の 2 行目：$F_b(x,y)F_b(x,y) \Rightarrow F_b(x,y)$
- 講義資料 5, 3 ページ，定理 5.2 の 5 行目：$\boldsymbol{f}\colon V \to W \subset \mathbb{R}^r \Rightarrow \boldsymbol{f}\colon W \to V \subset \mathbb{R}^r$
- 講義資料 5, 3 ページ，命題 5.4 の 3 行目：$(x, f(x) \Rightarrow (x, f(x))$
- 講義資料 5, 4 ページ，6 行目：もしも $F_x(a,b) = 0$ であっても $F_y(a,b) \neq 0$ ならば $\Rightarrow$ もしも $F_y(a,b) = 0$ であっても $F_x(a,b) \neq 0$ ならば

■授業に関する御意見

- 最近の講義の内容を理解するのが難しくなってきたのですが，先生は学生時代，いまやっている内容を理解するのは容易でしたか．それとも私と同じように苦労されたのでしょうか（質問する形になってしまいすみません）
  山田のコメント： そんなにすぐに理解できるものではないと思いますし，山田もそうでした．講義に出席したらラフにメモをとり，あとで論理のギャップを埋めたりしたノートを自分で作っていました．
- 縮閉線の縮閉線が一致するというのはどうしても，計算量が多くてできませんでした．かろうじて $|\gamma(t)| \neq 1$ ということが分かったぐらいです．　**山田のコメント：** むずかしいですよね．ちょっと検討する時間がないのでまたの機会に．
- カッシーニの卵形線は卵の形に見えません．　**山田のコメント：** ですよね．「卵形線」という語にはテキスト付録 B-2 のような意味があって，カッシーニの卵形線は卵形線にならない場合があります．だから「橙線」という語を用いました．

■質問と回答

質問 1： なめらかな曲線を定義したさいに（映写資料 C，3 枚目）「$C \cap U$ が $\{(x, f(x)); x \in I\}$ と合同となること」と書いた部分は「$x \in I$ において $y = f(x)$ と表せる」と書いても意味は同じですか？元文から抜けてしまう情報があれば教えていただきたいです．　**お答え：**「と合同である」の部分．$x^2 + y^2 - 1 = 0$ が表す図形の点 $(1, 0)$ の近傍を考えよ．

質問 2：「符号を変えない」とは 0 になる場合も含むのでしょうか．　**お答え：**はい．

質問 3： 問題 5-2 について．$F^{-1}(\{0\})$ の曲率関数がすべての $(x,y) \in F^{-1}(\{0\})$ で連続であることを証明しようと試みたのですが，できませんでした...もしこのことを示せたら，曲率が 0 にならないことさえ言えれば自動的に曲率が符号を変えないことが従うと思うのですが，うまく証明する方法はありますか？　**お答え：**なめらかな曲線なら各点の近傍でグラフ表示できるのでその区間では曲率は連続．連続性は局所的な性質だから結論が従う．この問題では点 $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ で曲率が 0 になります．

質問 4： 問 5.2 は曲線 $x^4 + y^4 = 1$ を（円 $x^2 + y^2 = 1$ のように）

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \ni t \mapsto \begin{cases} \left(\sqrt{\cos t}, \sqrt{\sin t}\right) & (0 \leqq t \leqq \pi/2) \\ \left(-\sqrt{-\cos t}, \sqrt{\sin t}\right) & (\pi/2 \leqq t \leqq \pi) \\ \left(-\sqrt{-\cos t}, -\sqrt{-\sin t}\right) & (\pi \leqq t \leqq 3\pi/2) \\ \left(\sqrt{\cos t}, -\sqrt{-\sin t}\right) & (3\pi/2 \leqq t \leqq 2\pi) \end{cases} \in [-1,1] \times [-1,1]$$

とパラメータ表示して計算すると（中略）曲率 $\kappa(t) =$ 中略 $3 \sin t \cos t / (\sin^3 t + \cos^3 t)^{3/2}$ となりました．$0 \leqq t \leqq \pi/2$ なら $\sin t \geqq 0$，$\cos t \geqq 0$ だから分母の符号（原文ママ：分子のことか？）が定まりますが，$\sin t$ と $\cos t$ のどちらかが負になるときは符号が定まらないと思ったのですが，どこが間違いだったのでしょうか．

お答え： 途中の計算（中略としたあたり）を追っていると $\sqrt{\cos t \sin t}$ という部分が見当たりますが，$\cos t \sin t$ は正とは限らないのではないでしょうか．符号により場合わけをして絶対値，平方根などをとる必要があります．

質問 5： 5-2 の問題で $F_n(x,y)=x^n+y^n-1=0$ を考えてみたときに n が大きくなるにつれて（中略）$F_n(x,y)=0$ は（図省略；$(\pm1,\pm1)$ を頂点とする正方形）の形に近づき，$x=\pm y$ となる点では $n\to\infty$ でとがると思います．ここで $F_n(x,y)=0$ の $x=y$ と成る点は $x^n+y^n-1=0$ より $x\neq0, y\neq0$ であり，この点で $F_y=ny^{n-1}\neq0$ なので $x=y$ なる点の付近で $y=f_n(x)$ と表せ，ここでの曲線を $\gamma(x,f_n(x))$（山田注：この記号はおかしい．$\gamma_n(x)=(x,f_n(x))$ か）のように表せる．そして $f_n'(x)=-F_x/F_y=-\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$ となるときの x を x_0 とすると，$\dot\gamma(x_0,f_n(x_0))=(1,-1)$ となり $n\to\infty$ としても特異点になるように見えなくなってしまいます．これはどの部分で間違っているのでしょうか．

お答え： x_0 は n に依存し，$n\to\infty$ のとき $x_0\to1$ なので考えている範囲から外れています．

質問 6： $\gamma_1(t)=(\cos t\cos2t,\sin t\cos2t)$ は正則であり（図略）の x 軸正のグラフを時計回り，y 軸負を時計回り，x 軸負を時計回り，y 軸正を時計回りするのですが（山田注：すべて「反時計回り」ではないでしょうか）x 軸正，x 軸負，y 軸負，y 軸正を順に時計回り，反時計回り，時計回り反時計回りするような正則曲線 γ_2 を考えたとき，$\gamma_1(t)$ と $\gamma_2(t)$ は何か関係があるのでしょうか．　**お答え：**もちろん「像が同じ」という関係があります．γ_2 は原点を通るときに C^2-級になりません．実際，γ_1 の曲率は原点で $+1$ ですが，γ_2 では向きを逆にしたときに $+1$ から -1 へジャンプしますので曲率が不連続．

質問 7： 問 5-2 で（中略）符号が変わってしまいます．この考え方のどこが誤っているのか教えてほしいです．　**お答え：**曲線の向き．

質問 8： $x^2+y^2-1=0$ が $y=f(x)$ と表せるときの曲率 $=-1$，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ の曲率 ∓1，$y=-\sqrt{1-x^2}$ で曲率が異なるのは，パラメータ x の向きが逆だからと考えているのですが，陰関数定理によって存在が保証されている $y=f(x)$ はパラメータの向きまで決まるものなのでしょうか？　**お答え：**いいえ．

質問 9： 5-2 で局所的 $\gamma(t)=(t,f(t))$ とみると，κ の正負が f'' と同じになるところは計算できたのですが，これだと常に x 軸正を向くので得られる曲率がおかしくなってしまいました．今回のような形なら具体的な形や対称性に依存した議論から解決できそうですが，一般の $f(x,y)=0$ で表されるような曲線について考える方法はありますか．

お答え： 向きが陰関数によって一意的に定まらない可能性があるので一般には無理．

質問 10： 陰関数表示された曲線の曲率を考えるとき，どちら向きに動くかで曲率は $\pm$ 反転してしまうが，パラメータの取り方にルールのようなもの（定義あるいは幾何学界隈の暗黙のルール）はあるのか．　**お答え：**ない．３通り以上になる可能性もある．

質問 11： 陰関数表示から回転数を得る方法はありますか？特異点の個数などから得られるのではないかと考えています．

お答え： 特異点がなく閉曲線なら，単純閉曲線なので，±1（テキスト §3 をみよ）．特異点がある場合は一般に，曲線の向きをうまく決められない可能性があるので定まらない．たとえば $F(x,y)=(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)$．

質問 12： 「陰関数 $F(x,y)=0$」とありましたが解析学の講義で（原文ママ：いままで**講義**で 2 回していたが聞いていなかったのか）「$y=f(x)$ を $F(x,y)=0$ によって定まる陰関数と呼ぶ」と教わりました．$F(x,y)=0$ のような形でも陰関数と呼ぶのですか？　**お答え：**関係式 $F(x,y)=0$ は y が x から「陰」に決まるということを表すので，陰関数．これを $y=f(x)$ の形に解いたものを $F(x,y)=0$ の**陽関数表示**とよぶという使い分けを山田はしています．

質問 13： 今回 5-2 で扱った「曲率の符号が変わらない曲線」には何か幾可学（原文ママ：最初の講義で説明したようにこれは誤字）的な意味はあるのか．曲面においても同様の概念を扱うことはあるのか．

お答え： 凸曲線という語がある．凸な単純閉曲線のことを卵形線という（テキスト付録 B-2）．凸曲面，卵形面という概念もあります．

質問 14： 曲率の符号が変わらない必要十分条件は簡単に書けたりしますか？　**お答え：**文字数が少ないのは「凸曲線である」．

質問 15： 平面上の 2 点からの距離の和が一定だと楕円，差が一定だと双曲線，商が一定だと円，そして積が一定だとレムニスケートになると学びましたが，他の演算を用いて表される有名な曲線はありますか．　**お答え：**「積が一定だとレムニスケート」は間違い．カッシニの橙線．特別な場合（積の値が二点の距離の平方根）がレムニスケート．「他の演算」で何を想定していますか？

質問 16： カッシニの橙線の $b=1$ の図形とレムニスケートが似ている図形にもかかわらず，なめらかな曲線の例としてレムニスケートがでて，$b=1$ でカッシニの橙線はなめらかでないのでしょうか．　**お答え：**なので「パラメータ表示」の場合と「陰関数表示」の場合でなめらかな曲線の定義を変えている．「パラメータ表示の特異点」と「陰関数表示の特異点」は別の概念．

質問 17： 「カッシニの橙線」を google で検索しても数学らしきページがヒットせず，「Cassinian oval」とすると「カッシーニの卵形線」がヒットしました．橙線とは何ですか?　**お答え：**Cassinian oval の訳語．橙は「だいだい」．数学公式 I（岩波書店）から．

質問 18： 陰関数で与えられる xy が自己交叉する点は弧長パラメータ表示では特異点にならない場合があると思うのですが，陰関数表示は座標軸に依存していることが原因なのでしょうか．　**お答え：**まず「弧長パラメータ表示」には定義から特異点は存在しません．ご質問ですが「いいえ」．陰関数表示された曲線の自己交点で進行方向を一般には選ぶことができない，ということです．

質問 19： パラメータ表示された曲線 γ の形を調べる際，特異点をもつときは深い情報が必要で，カスプならカスプの判定条件とあったが，他の特異点をもつ曲線についてどんな判定法がありますか？　**お答え：**いろいろ．なければ作る．

質問 20： 陰関数の微分公式は $x=f(y')$ のような微分方程式の求解に使えると思うのですが，名前はついていますか？

お答え： どうやって使うと思いますか？何の名前を聞いていますか？

質問 21： 曲面を，逆写像定理をみたす曲線族とみなしたら，その曲面は逆写像定理を満たしていると言えますか？

お答え： 「曲線族が逆写像定理をみたす」というフレーズの意味がわかりません．

質問 22： 2 次元の平面上での線の交わりは交叉と言うようですが，次元を大きくしたときの交わりはなんと言うのでしょうか．立体同士の交わりなどです．　**お答え：**交叉 intersection です．

質問 23： 自己交叉をもつというのはどのような時ですか？　**お答え：**何が？

質問 24： グラフ表示された曲線のことがよくわかりません．直感的にはわかっているつもりですが，フォーマルな定義（特に n 次元のとき）の意味がわかりません．　**お答え：**あなたが何を直感的にわかっているかわかりません．

質問 25： 5-2 の $y=0$ の議論がよくわからなかったです．　**お答え：**そうですか，としか言いようがない．

質問 26： レムニスケートで $b=1$ のとき $(0,0)$ が特異点になるのが少し直観に反した．　**お答え：**そうですか．

6 空間曲線の基本定理

■常微分方程式　未知関数 $y_j(t)$ $(j=1,\dots,m)$，その導関数 $y_j'(t)$ と独立変数の関係式

$$F(t,y_1,\dots,y_m,y_1',\dots,y_m')=\mathbf{0} \tag{6.1}$$

を**常微分方程式**[*1]という．ただし，F は適当な $\mathbb{R}^{2m+1}$ の領域から $\mathbb{R}^n$ への関数である．とくに，関係式 (6.1) が導関数 y_i' に関してとけているとき，すなわち

$$y_i'=f_i(t,y_1,\dots,y_m) \qquad (i=1,\dots,m) \tag{6.2}$$

とかけるとき，これを**正規形**の常微分方程式という．さらに，(6.2) の f_i $(i=1,\dots,m)$ が $y_1,\dots,y_m$ の一次式になっているとき，すなわち

$$y_i'=a_{i1}(t)y_1+\dots+a_{im}(t)y_m+b_i(t) \qquad (i=1,\dots,m) \tag{6.3}$$

の形をしているとき，**線型常微分方程式**という．

パラメータ t_0 と $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_m)$ を与えたとき，条件

$$y_i(t_0)=x_i \qquad (i=1,\dots,m) \tag{6.4}$$

を方程式 (6.2) や (6.3) の**初期条件**という．方程式 (6.2) または (6.3) と初期条件 (6.4) を満たす関数 $y_1(t)$, $\dots$, $y_m(t)$ を求めることを**常微分方程式の初期値問題**，得られた関数 $\bigl(y_i(t)\bigr)$ を初期値問題の**解**という．

例 6.1. 一様な重力加速度 g のもとでの長さ l の単振り子の鉛直下向き報告からの偏角 $x=x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2\sin x, \qquad \omega:=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

を満たす（ニュートンの運動方程式）．この式は $x'(t)=y(t)$, $y'(t)=-\omega^2\sin x(t)$ と書けるので，未知関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する正規形の常微分方程式である．

例 6.2. 関数 φ を区間 J $(\ni t_0)$ で定義された C^∞-級関数とするとき，

- 線型常微分方程式の初期値問題 $y'=\varphi(t)y$, $y(t_0)=1$ の解は $y(t)=\exp\int_{t_0}^t\varphi(u),du$ で，これは J 上で定義された C^∞-級関数である．
- 常微分方程式の初期値問題 $y'=\varphi(t)(1+y^2)$, $y(t_0)=0$ の解は $y(t)=\tan\int_{t_0}^t\varphi(u)\,du$ である．たとえば $\varphi(t)=t$ のとき，この解は区間 $(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$ で定義される．

■常微分方程式の基本定理　一般に常微分方程式の初期値問題は十分小さい区間で一意的な解を持つ：[*2]

定理 6.3. 開区間 $J\subset\mathbb{R}$ と領域 $U\subset\mathbb{R}^m$ に対して，C^∞-級写像 $\boldsymbol{F}\colon J\times U\to\mathbb{R}^m$ と $t_0\in J$，$\boldsymbol{x}\in U$ が与えられているとき，t_0 を含む十分小さい区間 $J'\subset J$ で定義された C^∞-級写像 $\boldsymbol{f}\colon J'\to\mathbb{R}^m$ で

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}(t)=\boldsymbol{F}\bigl(t;\boldsymbol{f}(t)\bigr), \qquad \boldsymbol{f}(t_0)=\boldsymbol{x} \tag{6.5}$$

2020 年 11 月 5 日

*1 常微分方程式：an ordinary differential equation

*2 微分方程式論の教科書などでは，もっと弱い微分可能性の下でステートメント，証明が与えられているが，この講義および幾何学概論第二ではこの形で十分である．

を満たすものがただ一つ存在する．さらに，(6.5) を満たす $\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{x}$ に依存するので，それを $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ と書くと，$(t,\boldsymbol{x})\mapsto \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ は C^∞-級写像である．

定理 6.4 (線型常微分方程式の基本定理[*3]). 開区間 $J\subset\mathbb{R}$ 上の C^∞-級関数 $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ $(i,j=1,\dots,m)$ と $t_0\in J$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$ に対して，(6.3)，(6.4) を満たす C^∞-級関数 $y_i\colon J\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,m)$ がただ一組存在する．

■行列値関数の微分方程式　正の整数 n に対して，$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ で実数を成分とする n 次正方行列全体を表す．区間 $J\subset\mathbb{R}$ で定義された C^∞-写像 $\Omega\colon J\to\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ に対して，$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$-値関数 $\mathcal{F}$ を未知関数とする方程式

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t)=\mathcal{F}(t)\Omega(t)\qquad \mathcal{F}(t_0)=A \tag{6.6}$$

を考える．ただし $t_0\in J$，$A\in\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ である．これは，$\mathcal{F}$ の各成分に関する線型常微分方程式なので 定理 6.4 が適用できて (6.6) を満たす $\mathcal{F}$ はただ一つ存在する．

補題 6.5. 行列値関数 Ω が交代行列に値をとり，$A\in\mathrm{SO}(n)$ ならば (6.6) をみたす $\mathcal{F}$ は $\mathrm{SO}(n)$ に値をとる．

証明. 交代性 ${}^t\Omega=-\Omega$ なので

$$\frac{d}{dt}\bigl(\mathcal{F}{}^t\mathcal{F}\bigr)=\frac{d\mathcal{F}}{dt}{}^t\mathcal{F}+\mathcal{F}\frac{d{}^t\mathcal{F}}{dt}=\frac{d\mathcal{F}}{dt}{}^t\mathcal{F}+\mathcal{F}{}^t\left(\frac{d\mathcal{F}}{dt}\right)=\mathcal{F}\Omega{}^t\mathcal{F}+\mathcal{F}{}^t\bigl(\mathcal{F}\Omega\bigr)=\mathcal{F}(\Omega+{}^t\Omega){}^t\mathcal{F}=O.$$

つまり $\mathcal{F}{}^t\mathcal{F}$ は一定だから，$\mathcal{F}(t){}^t\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(t_0){}^t\mathcal{F}(t_0)=A{}^tA=I$ なので，任意の t に対して $\mathcal{F}(t)\in\mathrm{O}(n)$．したがって $\det\mathcal{F}(t)$ は 1 または -1 だが $t\mapsto\det\mathcal{F}(t)$ は連続関数なので定数．$\det\mathcal{F}(t_0)=\det A=1$ だから $\mathcal{F}(t)\in\mathrm{SO}(n)$． □

■空間曲線の基本定理

定理 6.6. 区間 J で定義された正の値をとる C^∞-級関数 κ と実数値 C^∞-関数 τ に対して，弧長をパラメータとする空間曲線 $\gamma\colon J\to\mathbb{R}^3$ で曲率が κ，捩率が τ となるものが存在する．さらに，このような曲線は，変換 $\gamma\mapsto A\gamma+\boldsymbol{a}$ （$A\in\mathrm{SO}(3)$，$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

証明. 一意性の証明は平面曲線の場合と同様にできる．存在の証明を与えよう：線型常微分方程式の基本定理と補題 6.5 から，与えられた κ，τ に対して

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds}(s)=\mathcal{F}(s)\Omega(s),\quad \mathcal{F}(s_0)=I\qquad\left(\Omega(s):=\begin{pmatrix}0&-\kappa(s)&0\\ \kappa(s)&0&-\tau(s)\\ 0&\tau(s)&0\end{pmatrix}\right) \tag{6.7}$$

を満たす $\mathcal{F}\colon J\to\mathrm{SO}(3)$ がただ一つ存在する．列ベクトルに分解して $\mathcal{F}=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ と書き，

$$\gamma(s):=\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{e}(u)\,du$$

と定める．すると $\gamma'=\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}$ は単位ベクトルだから s は γ の弧長パラメータ．また，(6.7) の最初の式を第一列を比較すると $\boldsymbol{e}'=\kappa\boldsymbol{n}$．したがって $\boldsymbol{n}$ は主法線で κ は曲率．さらに，$\mathcal{F}\in\mathrm{SO}(3)$ なので $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n}$．したがって $\boldsymbol{b}$ は従法線で，(6.7) の第三列から $\boldsymbol{b}'=-\tau\boldsymbol{n}$．したがって $-\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}=\tau$ は捩率． □

[*3] 線型常微分方程式の基本定理 6.4 の証明は，たとえば，幾何学特論 B1（2019 年度 2Q）講義資料 `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2019/geom-b/index-en.html` 参照．