幾何学概論第一 定期試験 パート A 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は，すでに配布している所定の解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 答案は T2Scohla の課題「定期試験パート A」に提出してください. **提出締切は 11 時 30 分 JST**.
- 試験中の質問などは Zoom のチャットでお願いします.
- 採点結果は 11 月 19 日までにお知らせします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2020 年 11 月 26 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください. 上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.

テキスト・ノート・参考書などの参照可．外部との通信不可

問題 A1 座標平面上の放物線 $y = ax^2$ (a は正の定数) は原点において曲率円と 3 次の接触をすることを示しなさい. [20 点]

問題 A2 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ (J は $\mathbb{R}$ の区間) の曲率 κ が零にならないとする．このとき，γ の主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて $\sigma(s) := \gamma(s) + \dfrac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}(s)$ とおくとき，σ が $s_0 \in J$ において特異点をもつための条件を γ の曲率・捩率を用いて表しなさい. [20 点]

学籍番号：80709946	氏名：山田光太郎	提出物の成績：0

幾何学概論第一 定期試験 パート A 〔解答例 1〕

問題 A1 原点での放物線の曲率は $2a$，左向き単位法線ベクトルは $(0,1)$ なので，曲率円は $(0,1/(2a))$ を中心とする半径 $1/(2a)$ の円，すなわち方程式

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{1}{(2a)^2}$$

で表される円なので，原点の近くで

$$\begin{aligned}
y&=\frac{1}{2a}-\sqrt{\frac{1}{(2a)^2}-x^2}=\frac{1}{2a}\left(1-\sqrt{1-(2a)^2x^2}\right)\\
&=\frac{1}{2a}\left(1-\left(1-\frac{(2a)^2x^2}{2}-\frac{(2a)^4x^4}{8}+O(x^5)\right)\right)=ax^2+O(x^4)
\end{aligned}$$

と表されるので放物線と曲率円は 3 次の接触をする．

問題 A2 γ のフルネ枠を $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$，曲率・捩率をそれぞれ κ, τ とすると，フルネ・セレの公式から

$$\begin{aligned}
\sigma'(s)&=\gamma'(s)-\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}\boldsymbol{n}(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}'(s)\\
&=\boldsymbol{e}(s)-\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}\boldsymbol{n}(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\bigl(-\kappa(s)\boldsymbol{e}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)\bigr)\\
&=-\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}\boldsymbol{n}(s)+\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\boldsymbol{b}(s).
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立だから，$\sigma'(s_0)=\boldsymbol{0}$ となるための必要十分条件は$\underline{\kappa'(s_0)=\tau(s_0)=0}$.