2020 年 11 月 12 日 11 時 40 分 ∼12 時 20 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 パート B 〔問題 1〕

注意事項
- 答案は Google Forms （アドレス）にて提出してください**提出締切は 12 時 20 分 JST**.
- 試験中の質問などは Zoom のチャットでお願いします.
- 採点結果は 11 月 19 日までにお知らせします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2020 年 11 月 26 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい.

テキスト・ノート・参考書などの参照可．外部との通信不可

問題 B 以下の $\boxed{0}$∼$\boxed{6}$ に当てはまる数・式・言葉を入れなさい． [60 点]

- $\boxed{0}$ の解答は必須.
- $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{6}$ の配点は各 10 点.
- あてはまるものが複数ある場合はすべてを解答しなさい.

問題 B0 評価点は**課題の得点合計** x および**この試験の得点** y から

$$\min\left\{100, 5\times\left[A\times\frac{z}{5}\right]\right\},\qquad z:=(1-a)(4x)+a\qquad \text{ただし}\quad a=\boxed{0}\in[0,1]$$

で決定する．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数，$A\in[1,+\infty)$ は採点者が決める定数.

問題 B1 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $F(x,y)=x^3-\sqrt{2}xy+y^3$ を用いて陰関数表示される曲線

$$C:=\{(x,y)\,;\,F(x,y)=0\}\subset\mathbb{R}^2$$

は $(x,y)=\boxed{1}$ に（陰関数表示の）特異点をもつ．C から特異点を除いた集合を C_0 と書くとき，

$$C_0\cap\{(x,x)\in\mathbb{R}^2\,;\,x\in\mathbb{R}\}$$

の点における曲線 C の曲率の絶対値は $\boxed{2}$ である.

問題 B2 空間曲線

$$\gamma(t)=\left(2\tan^{-1}t,\sqrt{2}\log(1+t^2),2(t-\tan^{-1}t)\right)$$

に対して $s=\boxed{3}\,t$ とおくと s は γ の弧長パラメータとなる．この曲線の曲率を κ，捩率を τ とすると $\dfrac{\tau}{\kappa}=\boxed{4}$ である.

問題 B3 周期 2π の閉曲線 $\sigma(t)=\big((1-2\sin t)\cos t,(1-2\sin t)\sin t\big)$ の $t=0$ における曲率と同じ曲率をもつ点は $t=\boxed{5}\,\pi$ $(t\in(0,2\pi))$ である．また，この曲線の回転数は $\boxed{6}$ である.

問題 B∞ この科目の講義・教材・試験などについて，ご意見・ご感想などがありましたら自由にお書きください．この欄に書かれたことは成績に一切影響しません.

学籍番号：80709946	**氏名：山田光太郎**	**提出物の成績：0**

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 パート B 〔解答例 1〕

問題 B1 $F_x(x,y) = 3x^2 - \sqrt{2}y$, $F_y(x,y) = 3y^2 - \sqrt{2}x$ なので x, y が実であることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
dF(x,y) = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad F_x(x,y) = F_y(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - \sqrt{2}y = 3y^2 - \sqrt{2}x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3(x^2 - y^2) + \sqrt{2}(x-y) = 0 \text{ かつ } 3x^2 - \sqrt{2}y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-y)(3(x+y) + \sqrt{2}) = 0 \text{ かつ } 3x^2 - \sqrt{2}y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \bigl[x = y \text{ または } 3(x+y) + \sqrt{2} = 0\bigr] \text{ かつ } x^2 - \sqrt{2}y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0) \text{ または } \left[y = -x - \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ かつ } 3x^2 - \sqrt{2}x + \frac{2}{3} = 0\right] \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0).
\end{aligned}
$$

したがって，陰関数表示 $F(x,y) = 0$ の特異点は $\boxed{{}_{\mathbf{1}}\,\underline{(0,0)}}$ である．

次に $(\xi,\xi) \in C_0 = C \setminus \{(0,0)\}$ とすると $F(\xi,\xi) = 2\xi^3 - \sqrt{2}\xi^2 = 0$．$\xi \neq 0$ に注意すれば $\xi = 1/\sqrt{2}$．この点での C の曲率を求めればよい．$F_{xx}(x,y) = 6x$, $F_{xy}(x,y) = -\sqrt{2}$, $F_{yy}(x,y) = 6y$ から

$$
F_x(\xi,\xi) = F_y(\xi,\xi) = \frac{1}{2}, \qquad F_{xx}(\xi,\xi) = F_{yy}(\xi,\xi) = 3\sqrt{2}, \qquad F_{xy}(\xi,\xi) = -\sqrt{2}.
$$

とくに (ξ,ξ) で $F_y \neq 0$ なので，この点の近傍で C は $y = f(x)$ とグラフ表示されている．陰関数の微分公式から $(x,y) = (\xi,\xi)$ において $f' = -\frac{F_x}{F_y} = -1$,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+f'^2}^3 &= 2\sqrt{2}, \\
f'' &= -\frac{1}{(F_y)^2}\bigl((F_{xx} + F_{xy}f')F_y - (F_{xy} + F_{yy}f')F_x\bigr) \\
&= -\frac{1}{(F_y)^3}\bigl((F_y)^2F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} + (F_x)^2F_{yy}\bigr) = -2\bigl(3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\bigr) = -16\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

したがって，この点における曲率 κ は

$$
|\kappa| = \left|\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}^3}\right| = \frac{16\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \boxed{{}_{\mathbf{2}}\,\underline{8}}.
$$

幾何学概論第一 定期試験 パート B 〔解答例 2〕

問題 B2 t で微分して

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{2}{1+t^2}, \frac{2\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^2}\right), \qquad |\dot{\gamma}(t)| = 2$$

なので $s = \boxed{{}_{\mathbf{3}}\,2}\,t$ とおけば s は弧長パラメータ. $\frac{d}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}$ に注意して

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{ds} &= \frac{1}{2}\dot{\gamma} = \frac{1}{1+t^2}(1, \sqrt{2}t, t^2), \\
\frac{d^2\gamma}{ds^2} &= \frac{1}{4}\ddot{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{-2t}{(1+t^2)^2}(1, \sqrt{2}t, t^2) + \frac{1}{1+t^2}(0, \sqrt{2}, 2t)\right) = \frac{1}{2(1+t^2)^2}\left(-2t, -\sqrt{2}t^2 + \sqrt{2}, 2t\right), \\
\kappa = \left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right| &= \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}, \\
\boldsymbol{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}\left(-2t, -\sqrt{2}t^2 + \sqrt{2}, 2t\right) = \frac{1}{1+t^2}(-\sqrt{2}t, -t^2+1, \sqrt{2}t), \\
\boldsymbol{b} &= \frac{1}{(1+t^2)^2}\left(t^2 + t^4, \sqrt{2}(-t-t^3), t^2+1\right) = \frac{1}{1+t^2}(t^2, -\sqrt{2}t, 1), \\
\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(t^2, -\sqrt{2}t, 1) + \frac{1}{2(1+t^2)}(2t, -\sqrt{2}, 0), \\
\tau = -\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\cdot\boldsymbol{n} &= \frac{\sqrt{2}}{2(1+t^2)^2}(t^2+1) = \frac{1}{\sqrt{2}(t^2+1)}
\end{aligned}$$

したがって $\dfrac{\tau}{\kappa} = \boxed{{}_{\mathbf{4}}\,1}$.

2020 年 11 月 12 日 11 時 40 分 ~12 時 20 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 パート B 〔解答例 3〕

問題 B3 $\sigma(t) = (1-2\sin t)(\cos t, \sin t)$ だから

$$
\begin{aligned}
\dot\sigma &= -2\cos t(\cos t, \sin t) + (1-2\sin t)(-\sin t, \cos t),\\
\ddot\sigma &= 2\sin t(\cos t, \sin t) - 2\cos t(-\sin t, \cos t) - 2\cos t(-\sin t, \cos t) + (1-2\sin t)(-\cos t, -\sin t)\\
&= (4\sin t - 1)(\cos t, \sin t) - 4\cos t(-\sin t, \cos t),\\
|\dot\sigma|^2 &= 4\cos^2 t + (1-2\sin t)^2 = 5 - 4\sin t,\\
\det(\dot\sigma, \ddot\sigma) &= \begin{vmatrix} -2\cos t & 4\sin t - 1 \\ 1 - 2\sin t & -4\cos t \end{vmatrix} = 9 - 6\sin t,\\
\kappa &= \frac{\det(\dot\sigma,\ddot\sigma)}{|\dot\sigma|^3} = \frac{9-6\sin t}{\sqrt{5-4\sin t}^3}.
\end{aligned}
$$

とくに $\kappa(0) = \frac{9}{5\sqrt5}$．したがって

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) = \kappa(0) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{9-6\sin t}{\sqrt{5-4\sin t}^3} = \frac{9}{5\sqrt5} \quad \Leftrightarrow \quad 5\sqrt5(3-2\sin t) = 3\sqrt{5-4\sin t}^3 (>0)\\
&\Leftrightarrow \quad 5^3(3-2\sin t)^2 = 3^2(5-4\sin t)^3\\
&\Leftrightarrow \quad 5^3(9 - 12\sin t + 4\sin^2 t) = 3^2(5^3 - 12\cdot 5^2\sin t + 48\cdot 5\sin^2 t - 2^6\sin^3 t)\\
&\Leftrightarrow \quad 4\sin t(300 - 415\sin t + 144t^2) \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = 0.
\end{aligned}
$$

したがって $(0, 2\pi)$ で $\kappa(t) = \kappa(0)$ となるのは $t = \boxed{\mathbf{5}\ \underline{1}}\pi$ のとき．

ここで，σ のガウス写像は

$$
\boldsymbol{e}(t) = \frac{\dot\sigma}{|\dot\sigma|} = \frac{(-2\cos^2 t + 2\sin^2 t - \sin t, \cos t(1-4\sin t))}{\sqrt{5-4\sin t}}
$$

で，区間 $[0, 2\pi)$ で $\boldsymbol{e}(t) = (1, 0)$ となるのは $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ の 2 回．$\kappa > 0$ なのでガウス写像は単位円周を正の向きに逆戻りせずに回るので，その回転数は $\boxed{\mathbf{6}\ \underline{2}}$ である．

別解として s を弧長，閉曲線の長さを L とすると

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \kappa(s)\,ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \kappa(t)|\dot\sigma(t)|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3(3-2\sin t)}{5-4\sin t}\,dt\\
&= 3\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3 - \frac{4u}{1+u^2}}{5 - \frac{8u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\,du = \cdots = 4\pi.
\end{aligned}
$$