幾何学概論第二 (MTH.B212)

0: 準備

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 03 日 (2020/12/10 訂正)

目標

事実

- $\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像
$$p\colon U \ni (u,v) \longmapsto \bigl(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^3$$
が，U の各点で「p_u と p_v が一次独立」という性質を満たしているならば p は「なめらかな曲面」を与える．
- $\mathbb{R}^3$ の領域 D 上で定義された C^∞-関数 $F\colon D \to \mathbb{R}$ に対して $S := F^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ とする．このとき $dF = (F_x, F_y, F_z) \neq \mathbf{0}$ が S の各点で成り立つなら S は「なめらかな曲面」である．

関数のグラフ

$\mathbb{R}^2$ の領域 W 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ のグラフ
$$\bigl\{\bigl(x,y,f(x,y)\bigr)\,;\,(x,y)\in W\bigr\}$$
は「なめらかな曲面」である．

逆写像定理

定理 (逆写像定理)

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級写像
$$F\colon U \ni (u,v) \mapsto F(u,v) = \bigl(\xi(u,v), \eta(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^2$$
のヤコビ行列式
$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix}\xi_u & \xi_v\\ \eta_u & \eta_v\end{pmatrix} = \xi_u\eta_v - \xi_v\eta_u$$
が $\boldsymbol{a} \in U$ で零でないとすると，$\boldsymbol{a}$ の近傍 V で次を満たすものが存在する：

- $F|_V\colon V \to \mathbb{R}^2$ は単射，
- $(F|_V)^{-1}\colon F(V) \to U$ は C^∞-級．

逆写像定理

系

$\mathbb{R}^2$ の領域 U から $\mathbb{R}^3$ への C^∞-級写像
$$p\colon U \ni (u,v) \mapsto p(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\bigr)$$
が
$$(a,b) \in U \text{ において } p_u(a,b) \text{ と } p_v(a,b) \text{ は一次独立}$$
を満たすならば，(a,b) の近傍 V と $\mathbb{R}^2$ の領域 W 上の C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ が存在して，

像 $p(V)$ は f のグラフ $\bigl\{\bigl(x,y,f(x,y)\bigr)\,;\,(x,y)\in W\bigr\}$ と合同

である．

正則曲面

定義

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級写像
$$p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \ni (u,v) \longmapsto p(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^3$$
の特異点とは
$$p_u(u_0,v_0) \text{ と } p_v(u_0,v_0) \text{ が一次従属となるような点 } (u_0,v_0) \in U$$
のこと．
写像 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が特異点をもたないとき，
正則にパラメータ付けられた曲面，正則曲面
という．

グラフは正則曲面

例

領域 $W \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 f のグラフ
$p\colon W \ni (x,y) \mapsto p(x,y) = \bigl(x,y,f(x,y)\bigr) \in \mathbb{R}^3$ は正則曲面である．

事実

写像 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面ならば，各点 $\boldsymbol{a} = (u_0,v_0) \in U$ の近傍 V で次を満たすものが存在する：

$p|_V$ の像 $p(V)$ は関数 $f(x,y)$ のグラフと合同である．

陰関数定理

定理 (陰関数定理)

$\mathbb{R}^3$ の領域 U 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が，
$\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3) \in U$ で (a) $F(\boldsymbol{a}) = 0$; (b) $F_z(\boldsymbol{a}) \neq 0$ を満たすとき，$\boldsymbol{a}$ の近傍 V と $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ の近傍 W 上の C^∞-級関数 f が存在して $F^{-1}(\{0\}) \cap V = \bigl\{\bigl(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{w})\bigr)\,;\,\boldsymbol{w}\in W\bigr\}$，とくに $F(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{w})) = 0$ $(\boldsymbol{w} \in W)$ が成り立つ．

陰関数定理

系
$\mathbb{R}^3$ の領域 U 上の C^∞-級関数 F が，$a \in U$ で $F = 0$,
$dF = (F_x, F_y, F_z) \neq \mathbf{0}$ を満たすならば，a の近傍 V，$\mathbb{R}^2$ の領域 W，C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ が存在して，$F^{-1}(\{0\}) \cap V$ は f のグラフと合同である．

正則曲面

例
C^∞-級関数 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対して $S := F^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ かつ S の各点で $dF \neq \mathbf{0}$ ならば，各 $\mathrm{P} \in S$ の近傍 V が存在して $S \cap V$ は正則曲面の像である．
このとき S 自身を正則曲面ということもある．

例
正の整数 m に対して $F(x, y, z) := x^m + y^m + z^m - 1$ とすると

$$S := F^{-1}(\{0\}) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, F(x, y, z) = 0\right\}$$

は正則曲面である．

接ベクトル空間

定義
正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の点 $(u_0, v_0) \in U$ に対して

$$dp\big(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2\big) := \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p \circ \gamma(t)\,;\, \gamma \in C^\infty\big((-\varepsilon, \varepsilon), U\big), \gamma(0) = (u_0, v_0) \right\}$$

を p の点 (u_0, v_0) における接ベクトル空間という．

接ベクトル空間

補題
正則曲面 p に対して

$$dp\big(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2\big) = \mathrm{Span}\{p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)\} = \big(p_u(u_0, v_0) \times p_v(u_0, v_0)\big)^\perp.$$

とくに，接ベクトル空間の次元は 2．

接ベクトル空間

補題
正則曲面 $S = F^{-1}(\{0\})$ 上の (a, b, c) における接ベクトル空間は

$$\big(\mathrm{grad}\, F(a, b, c)\big)^\perp = \big(F_x(a, b, c), F_y(a, b, c), F_z(a, b, c)\big)^\perp$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} ; v_1 F_x(a, b, c) + v_2 F_y(a, b, c) + v_3 F_z(a, b, c) = 0 \right\}$$

で与えられる．