幾何学概論第二 (MTH.B212)

1: Gauss 曲率・平均曲率

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 03 日 (2020/12/10 訂正)

目標

正則曲面 $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \ni (u,v) \mapsto p(u,v) \in \mathbb{R}^3$ **に対して次の量を定義する：**

- **単位法線ベクトル場** $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$, $|\nu| = 1$.
- **第一基本量：** $E = p_u \cdot p_u$, $F = p_u \cdot p_v$, $G = p_v \cdot p_v$.
- **第二基本量：** $L = -p_u \cdot \nu_u$, $M = -p_u \cdot \nu_v = -p_v \cdot \nu_u$, $N = -p_v \cdot \nu_v$.
- Weingarten **行列** A**：**

$$A := \widehat{I}^{-1}\widehat{I\!I}, \qquad \widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

- Gauss **曲率** $K = \det A$, **平均曲率** $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$.

単位法線ベクトル

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ **が与えられているとき，**

定義

点 $(u,v) \in U$ **における接ベクトル空間** $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$ **に直交する単位ベクトル** $\nu(u,v)$ **を** p **の単位法線ベクトル，** ν **を** (u,v) **のベクトル値関数とみなすとき単位法線ベクトル場という．**

- **各点における単位法線ベクトルの取り方は二通りある．**
- $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$ **は** $p_u(u,v)$ **と** $p_v(u,v)$ **ではられるベクトル空間だから，その直交補空間はベクトル積** $p_u(u,v) \times p_v(u,v)$ **で生成される．したがって**

$$\nu(u,v) = \pm\frac{p_u(u,v) \times p_v(u,v)}{|p_u(u,v) \times p_v(u,v)|}$$

は単位法線ベクトル場を与える．

第一基本量

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ **が与えられているとき，**

定義 (第一基本量)

3 **つの関数** $E := p_u \cdot p_u$, $F = p_u \cdot p_v$, $G = p_v \cdot p_v$ **を** p **の第一基本量という．**

補題

正則曲面 p **の第一基本量** E, F, G **は** $EG - F^2 > 0$ **を満たす．**

証明.

正則性から Schwarz **の不等式** $|p_u|\,|p_v| \geqq |p_u \cdot p_v|$ **の等号は成立しない．** □

第一基本量

第一基本行列：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

- **対称行列**
- **正定値とくに正則行列**
- $|p_u \times p_v|^2 = \det \widehat{I} = EG - F^2$.

第二基本量

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ **の単位法線ベクトル場** ν **をとるとき，**

補題

$p_u \cdot \nu_u = -p_{uu} \cdot \nu$, $p_u \cdot \nu_v = -p_{uv} \cdot \nu = p_v \cdot \nu_u$, $p_v \cdot \nu_v = -p_{vv} \cdot \nu$.

定義 (第二基本量; 第二基本行列)

$L := -p_u \cdot \nu_u = p_{uu} \cdot \nu$, $M := -p_u \cdot \nu_v = p_{uv} \cdot \nu = p_v \cdot \nu_u$, $N := -p_v \cdot \nu_v = p_{vv} \cdot \nu$;

$$\widehat{I\!I} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Weingarten 行列

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ **の単位法線ベクトル場** ν **をとるとき，**

定義 (Weingarten 行列, Gauss 曲率, 平均曲率)

$$A := \widehat{I}^{-1}\widehat{I\!I} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$K := \det A = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \qquad \text{(Gauss 曲率)}$$

$$H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} A = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \qquad \text{(平均曲率)}$$

例（平面）

- $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$**：**$\mathbb{R}^3$ **の一次独立なベクトルの組**
- $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^3$
- $p(u,v) := \overrightarrow{\mathrm{OP}} + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$.

例（グラフ）

- $f\colon \mathbb{R}^2 \supset W \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ (C^∞-級)
- $p(x,y) = \bigl(x, y, f(x,y)\bigr)$

例（回転面）

- $\bigl(x(v), z(v)\bigr)$：xz-平面上の正則曲線で $x > 0$.
- $p(u,v) = \bigl(x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v)\bigr)$.

例（球面）

- $p(u,v) = R\bigl(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\bigr)$.

問題 1-1

問題

正の定数 a と実定数 b に対して，
$p(u,v) := \bigl(a \operatorname{sech} v \cos u, a \operatorname{sech} v \sin u, a(v - \tanh v) + bu\bigr)$ とおく．

1. 写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を曲面のパラメータ表示とみなしたとき，特異点集合 ($\subset \mathbb{R}^2$) を求めなさい．
2. 写像 p の特異点でない点（正則点 regular point という）でのガウス曲率・平均曲率を求めなさい．

問題 1-2

問題

関数 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $F(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^4 - 1$ で定めるとき，$F^{-1}(\{0\})$ は，なめらかな曲面を定める．この曲面の，点 (a,b,c) におけるガウス曲率と，その最大値を求めなさい．