

幾何学概論第二 (MTH.B212)

1: Gauss 曲率・平均曲率

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 03 日 (2020/12/10 訂正)

目標

正則曲面 $p: \mathbb{R}^2 \supset U \ni (u, v) \mapsto p(u, v) \in \mathbb{R}^3$ に対して次の量を定義する：

- ▶ 単位法線ベクトル場 $\nu: U \rightarrow \mathbb{R}^3, |\nu| = 1$.
- ▶ 第一基本量： $E = p_u \cdot p_u, F = p_u \cdot p_v, G = p_v \cdot p_v$.
- ▶ 第二基本量：
 $L = -p_u \cdot \nu_u, M = -p_u \cdot \nu_v = -p_v \cdot \nu_u, N = -p_v \cdot \nu_v$.
- ▶ Weingarten 行列 A ：

$$A := \hat{I}^{-1} \hat{II}, \quad \hat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \hat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

- ▶ Gauss 曲率 $K = \det A$, 平均曲率 $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A$.

単位法線ベクトル

正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が与えられているとき,

定義

点 $(u, v) \in U$ における接ベクトル空間 $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$ に直交する単位ベクトル $\nu(u, v)$ を p の単位法線ベクトル, ν を (u, v) のベクトル値関数とみなすとき単位法線ベクトル場という.

- ▶ 各点における単位法線ベクトルの取り方は二通りある.
- ▶ $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$ は $p_u(u, v)$ と $p_v(u, v)$ ではられるベクトル空間だから, その直交補空間はベクトル積 $p_u(u, v) \times p_v(u, v)$ で生成される. したがって

$$\nu(u, v) = \pm \frac{p_u(u, v) \times p_v(u, v)}{|p_u(u, v) \times p_v(u, v)|}$$

は単位法線ベクトル場を与える.

第一基本量

正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が与えられているとき,

定義 (第一基本量)

3つの関数 $E := p_u \cdot p_u$, $F = p_u \cdot p_v$, $G = p_v \cdot p_v$ を p の第一基本量という.

補題

正則曲面 p の第一基本量 E, F, G は $EG - F^2 > 0$ を満たす.

証明.

正則性から Schwarz の不等式 $|p_u| |p_v| \geq |p_u \cdot p_v|$ の等号は成立しない. □

第一基本量

第一基本行列：

$$\hat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

- ▶ 对称行列
- ▶ 正定値とくに正則行列
- ▶ $|p_u \times p_v|^2 = \det \hat{I} = EG - F^2$.

第二基本量

正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場 ν をとるとき,

補題

$$p_u \cdot \nu_u = -p_{uu} \cdot \nu, \quad p_u \cdot \nu_v = -p_{uv} \cdot \nu = p_v \cdot \nu_u, \quad p_v \cdot \nu_v = -p_{vv} \cdot \nu.$$

定義 (第二基本量; 第二基本行列)

$$L := -p_u \cdot \nu_u = p_{uu} \cdot \nu, \quad M := -p_u \cdot \nu_v = p_{uv} \cdot \nu = p_v \cdot \nu_u,$$

$$N := -p_v \cdot \nu_v = p_{vv} \cdot \nu;$$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Weingarten 行列

正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場 ν をとるとき,
定義 (Weingarten 行列, Gauss 曲率, 平均曲率)

$$A := \hat{I}^{-1} \hat{II} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$K := \det A = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (\text{Gauss 曲率})$$

$$H := \frac{1}{2} \operatorname{tr} A = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \quad (\text{平均曲率})$$

例 (平面)

- ▶ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} : \mathbb{R}^3$ の一次独立なベクトルの組
- ▶ $P \in \mathbb{R}^3$
- ▶ $p(u, v) := \overrightarrow{OP} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$

例 (グラフ)

- ▶ $f: \mathbb{R}^2 \supset W \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ (C^∞ -級)
- ▶ $p(x, y) = (x, y, f(x, y))$

例（回転面）

- ▶ $(x(v), z(v))$: xz -平面上の正則曲線で $x > 0$.
- ▶ $p(u, v) = (x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v))$.

例 (球面)

▶ $p(u, v) = R(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$.

問題 1-1

問題

正の定数 a と実定数 b に対して,

$p(u, v) := (a \operatorname{sech} v \cos u, a \operatorname{sech} v \sin u, a(v - \tanh v) + bu)$ とおく.

1. 写像 $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を曲面のパラメータ表示とみなしたとき, 特異点集合 ($\subset \mathbb{R}^2$) を求めなさい.
2. 写像 p の特異点でない点 (正則点 regular point という) で, のガウス曲率・平均曲率を求めなさい.

問題 1-2

問題

関数 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を $F(x, y, z) := x^4 + y^4 + z^4 - 1$ で定めるとき， $F^{-1}(\{0\})$ は，なめらかな曲面を定める．この曲面の，点 (a, b, c) におけるガウス曲率と，その最大値を求めなさい．