2020 年 12 月 03 日 (2020 年 12 月 10 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 1

講義概要

■重要なポインタ

- http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/ (この授業の公式ページ)
- http://www.official.kotaroy.com/class/2020/geom-2/ (この授業のページ; ミラーサイト)
- https://t2schola.titech.ac.jp/ (T2SCHOLA; 課題の提出，返却はこちら)
- **OCW/OCW-i は動作が不安定なため，今年度は講義資料の登録を行わない．**上記をご利用ください．

■科目名など　幾何学概論第二 (MTH.B212)（木曜日・3/4 時限・理学院数学系）

■担当者　山田光太郎（理学院数学系）kotaro@math.titech.ac.jp

■講義の概要　MTH.B211 幾何学概論第一に続き，主に以下の事項を学ぶ：正則曲面のパラメータ表示，第一基本形式・長さ・角度・面積，第二基本形式・主曲率・Gauss 曲率・平均曲率，測地線，Gauss-Bonnet の定理，曲面論の基本定理の意味．古典的な曲面の微分幾何学の基本事項を身につけるとともに，現代の微分幾何学を学ぶための準備を行う．

■到達目標　3 次元ユークリッド空間内の曲面の微分幾何学の基本的な事項，とくに曲面の曲率の概念と その幾何学的な性質を学ぶ．具体的には (1) 曲面のパラメータ表示とパラメータ変換，パラメータによらない量の概念を知る．(2) 曲面の曲率と曲面の形状の関係を知る．(3) 曲面の大域的性質と局所的性質の具体例を知る．(4) 理論の具体例を計算によって確認する．

■教科書　梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面』改訂版（裳華房）
正誤表：http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html

■成績評価の方法

- 第 1 回から第 5 回までの授業で**課題**を提出．1 回あたり 5 点満点．
- 最終回にオンラインにて**試験**を行う．試験の方法は第 3 クォーターに開講された幾何学概論第一（MTH.B211）の経験を踏まえ検討中．試験実施の 2 回前の講義の際に説明する．これを 100 点満点（予定）で評価する．試験を受験することは単位を得るための**必要条件**である (十分条件ではない)．
- 成績は**試験**と**課題**の得点から決定する．決定の方式は次の通り：課題の得点の合計を x 点($0 \leqq x \leqq 25$)，試験の得点を y 点（$0 \leqq y \leqq 100$）としたとき，
$$Z := 5 \times \left[A(z) \times \frac{z}{5}\right], \qquad z := (1-a)(4x) + ay$$
で与えられる Z と 100 のうち大きくない方を評価点とする（予定）．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数，係数 $a \in [0,1]$ は**試験答案提出時に受講者自身が決める定数**，また，関数
$$A\colon [0,100] \longrightarrow [1,+\infty)$$
は平均点・合格率の調整のため**採点時に決める**単調非増加な関数で，$A(100) = 1$ となるものである．

■課題とその評価方法

- 講義の際に提示する問題のうちから 1 問を選んで回答する．**2 点満点**
- 講義内容，講義資料の**誤りの指摘**または**質問 3 点満点**．講義中に zoom のチャット機能を用いて指摘・質問をしてもよい．その際は提出要旨のチャットの欄をチェックすること．
  - 評価基準：基本点 **2 点**；計算・議論を自分で追わないと見つけられないような誤りの指摘・質問は **3 点**；同一の指摘が 5 件以上あるものは **1 点減点**；講義内容と無関係，高校生程度の誤認，講義中に指摘した内容，チャットでの指摘と同一内容，文として成立しないものは **0 点**．
  - 複数の質問・誤りの指摘はそのうち**最高点**のものを評価点とする．

■提出方法

- 所定の用紙（A4 版 2 枚）—提出用紙—に記入して T2SCHOLA にて提出．
- 用紙は，講義 web ページ，T2SCHOLA に pdf 形式で置く．採点の都合上，提出用紙フォーマットの変更，ページの追加は不可．
- 電子ファイルでの提出は，見た目のフォーマットが同一であれば可．(0) 印刷した提出用紙に手書きしたもののスキャン．(1) ワードプロセッサで回答をつくり背景に提出用紙の画像を使う (2) ワードプロセッサで提出用紙と同様な用紙をつくりそこに記入 (3) ワードプロセッサで回答をつくり，提出用紙の pdf ファイルに貼り付ける (4) 提出用紙の pdf ファイルにタブレットコンピュータなどを用いて回答を書き込み，pdf として出力する (5) 提出用紙の LaTeX ソースを hack して書き込む，など．
- pdf は 2 ページ 1 ファイル．ページごとに別ファイルで提出，3 ページ以上のファイルの提出は不可．
- pdf のページサイズは A4 縦置き (210mm × 297mm) に近い値にすること．
- 提出期限は講義直後の**土曜日の 23 時 59 分（JST）**．
- 提出物は次回の講義までに返却する；質問等には個人が特定できない形で回答する．
- 提出用紙には授業への意見・希望を記入する欄を設ける．内容は**成績に一切関係ない**ので積極的に利用してほしい．なお，内容は個人を特定できない形で講師のコメントとともに公開する．

■FAQ

Q: なぜ質問を評価するのか．

A: 講義を聞いて頭を働かせて欲しいから．

Q: なぜ誤りの指摘を評価するのか．

A: 講義を聴いた，講義資料を読んだということだから．

Q: なぜ質問・誤りの指摘の満点が問題の満点より大きいのか．

A: 本学の学生は問題があれば黙っていても解くだろう．それ以外の授業の参加を積極的に評価したい．

Q: オンラインなのになぜ無理して試験を行うのか．

A: 今後「新しい生活様式」において，従来の形式での一斉試験を行うためのハードルが上がると予想される．その準備として，オンライン試験の方法を考えておきたい，そのための「実験」．

Q: 試験の点数と課題の点数の重みを自分で決められるのはなぜか．

A: 従来は定期試験のみで評価，それで評点の低い人は提出物の得点で底上げしていた．今年度は定期試験を公平かつ確実に実施し難いので，自身で評価の仕方を決めること少しでも不公平感を払拭したい．

0 準備

定理 0.1 (逆写像定理). $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級写像 $F\colon U \ni (u,v) \mapsto F(u,v) = \bigl(\xi(u,v),\eta(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列式 $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} = \xi_u\eta_v - \xi_v\eta_u$ が $\boldsymbol{a} \in U$ で零でないとすると，ある $\boldsymbol{a}$ の近傍 V で (1) $F|_V\colon V \to \mathbb{R}^2$ は単射; (2) $(F|_V)^{-1}\colon F(V) \to U$ は C^∞-級となるものが存在する．

系 0.2. $\mathbb{R}^2$ の領域 U から $\mathbb{R}^3$ への C^∞-級写像 $p\colon U \ni (u,v) \mapsto p(u,v) = \bigl(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\bigr)$ が「$(a,b)\in U$ において $p_u(a,b)$ と $p_v(a,b)$ は一次独立」を満たすならば，(a,b) の近傍 V と $\mathbb{R}^2$ の領域 W 上の C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ が存在して，像 $p(V)$ は f のグラフ $\bigl\{\bigl(x,y,f(x,y)\bigr)\,;\,(x,y)\in W\bigr\}$ と合同である．

証明： p_u, p_v が一次独立であるための必要十分条件は，3 つの行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ のどれかが 0 でないことである．$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(a,b) \neq 0$ ならば，写像 $(u,v)\mapsto(x,y)$ に定理 0.1 が適用できて，逆写像 $(x,y)\mapsto(u,v)$ が存在する．そこで $f(x,y) := z\bigl(u(x,y),v(x,y)\bigr)$ とおくと，$p(V)$ と f のグラフが一致する．$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(a,b)=0$ のときは座標軸を入れ替える（合同変換）ことにより上の状況に帰着される．

定理 0.3 (陰関数定理). $\mathbb{R}^3$ の領域 U 上の C^∞-級関数 $F\colon U\to\mathbb{R}$ が，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\in U$ で (a) $F(\boldsymbol{a})=0$; (b) $F_z(\boldsymbol{a})\neq 0$ を満たすとき，$\boldsymbol{a}$ の近傍 V と $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ の近傍 W 上の C^∞-級関数 f が存在して $F^{-1}(\{0\})\cap V = \bigl\{(\boldsymbol{w},f(\boldsymbol{w}))\,;\,\boldsymbol{w}\in W\bigr\}$，とくに $F(\boldsymbol{w},f(\boldsymbol{w}))=0$ $(\boldsymbol{w}\in W)$ が成り立つ．

系 0.4. $\mathbb{R}^3$ の領域 U 上の C^∞-級関数 F が，$\boldsymbol{a}\in U$ で $F=0$, $dF=(F_x,F_y,F_z)\neq\boldsymbol{0}$ を満たすならば，$\boldsymbol{a}$ の近傍 V，$\mathbb{R}^2$ の領域 W，C^∞-級関数 $f\colon W\to\mathbb{R}$ が存在して，$F^{-1}(\{0\})\cap V$ は f のグラフと合同である．

証明： $F_z(\boldsymbol{a})\neq 0$ の場合は陰関数定理 0.3 そのもの．$F_z(\boldsymbol{a})=0$ のときは，F_x, F_y のいずれかが 0 でないので，座標軸の順番を入れ替えれば（合同変換）上の場合に帰着される．

■正則曲面 領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級写像 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ の**特異点** a singular point とは $p_u(u_0,v_0)$ と $p_v(u_0,v_0)$ が一次従属となるような点 $(u_0,v_0)\in U$ のことである．とくに p が U 上に特異点をもたないとき，**正則にパラメータ付けられた曲面**または単に**正則曲面** a regular surface という．

例 0.5. 領域 $W\subset\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 f の “グラフ” $p\colon W\ni(x,y)\mapsto p(x,y)=\bigl(x,y,f(x,y)\bigr)\in\mathbb{R}^3$ は正則曲面である．特に C^∞-級関数 $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対して $S:=F^{-1}(\{0\})\neq\emptyset$ かつ S の各点で $dF\neq\boldsymbol{0}$ ならば，各 $\mathrm{P}\in S$ の近傍 V が存在して $S\cap V$ は正則曲面の像である．このとき S 自身を**正則曲面**ということもある．

定義 0.6. 正則曲面 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ の点 $(u_0,v_0)\in U$ に対して

$$dp\bigl(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2\bigr) := \Bigl\{\left.\tfrac{d}{dt}\right|_{t=0} p\circ\gamma(t)\,;\,\gamma\in C^\infty\bigl((-\varepsilon,\varepsilon),U\bigr),\gamma(0)=(u_0,v_0)\Bigr\}$$

を p の点 (u_0,v_0) における**接ベクトル空間** the tangent vector space という．

補題 0.7. 正則曲面 p に対して $dp\bigl(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2\bigr)=\operatorname{Span}\{p_u(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\}=\bigl(p_u(u_0,v_0)\times p_v(u_0,v_0)\bigr)^\perp$. とくに，接ベクトル空間の次元は 2.

証明： $\gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ とおくと $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}p\circ\gamma(t)=\dot u(0)p_u(u_0,v_0)+\dot v(0)p_v(u_0,v_0)$ なので p_u, p_v が一次独立であることから結論が得られる．

2020 年 12 月 03 日 (2020 年 12 月 10 日訂正)

1 Gauss 曲率・平均曲率

■単位法線ベクトル 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の $(u,v)\in U$ における接ベクトル空間 $dp\bigl(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2\bigr)$ に直交する単位ベクトル $\nu(u,v)$ を p の**単位法線ベクトル** the unit normal vector という．とくに ν を (u,v) の関数とみなすとき，**単位法線ベクトル場**という．各点における単位法線ベクトルの取り方は二通りある．とくに，ベクトル積を用いて $\nu(u,v) := \frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$ とおくと，これは p の単位法線ベクトル場である．

■Gauss 曲率・平均曲率 正則曲面 p の単位法線ベクトル場 ν を一つ選んでおく．

定義 1.1 (第一基本量)**.** 3 つの関数 $E := p_u\cdot p_u$, $F = p_u\cdot p_v$, $G = p_v\cdot p_v$ を p の**第一基本量**という．

補題 1.2. 正則曲面 p の第一基本量 E, F, G は $EG - F^2 > 0$ を満たす．

証明： 正則性から Schwarz の不等式 $|p_u|\,|p_v| \geqq |p_u\cdot p_v|$ の等号が成り立たない．

補題 1.3. $p_u\cdot\nu_u = -p_{uu}\cdot\nu$, $p_u\cdot\nu_v = -p_{uv}\cdot\nu = p_v\cdot\nu_u$, $p_v\cdot\nu_v = -p_{vv}\cdot\nu$.

証明： $p_u\cdot\nu_u = (p_u\cdot\nu)_u - p_{uu}\cdot\nu = -p_{uu}\cdot\nu$. 以下同様.

定義 1.4. 3 つの関数 $L := -p_u\cdot\nu_u$, $M := -p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u$, $N := -p_v\cdot\nu_v$ を p の（単位法線ベクトル場 ν に関する）**第二基本量**および，**第一基本行列** $\widehat{I}$，**第二基本行列** $\widehat{II}$，*Weingarten* **行列** A を次で定める：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad \widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \qquad A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}.$$

さらに $K := \det A$, $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$ をそれぞれ p の *Gauss* **曲率**，**平均曲率**という．

例 1.5 (平面・球面)**.** $\mathbb{R}^3$ の一次独立なベクトル $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ と点 P に対して $p(u,v) := \overrightarrow{\mathrm{OP}} + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ は平面の正則パラメータ表示を与える．この平面の Gauss 曲率，平均曲率はともに 0 である．

また，正の定数 R に対して $p(u,v) = R(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ $\bigl((u,v)\in(-\pi,\pi)\times\bigl(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\bigr)\bigr)$ は原点を中心とする半径 R の球面の正則なパラメータ表示を与える．この球面の単位法線ベクトル場として $\nu = p/R$ をとるとき，ガウス曲率は R^{-2}, 平均曲率は $-R^{-1}$ である．

例 1.6 (グラフ表示)**.** $\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 f に対して $p(x,y) := \bigl(x,y,f(x,y)\bigr)$ は f のグラフの正則なパラメータ表示とみなせる．単位法線ベクトル場を $\nu = \Delta^{-1}(-f_x,-f_y,1)$ （$\Delta := \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$） ととると，ガウス曲率，平均曲率はそれぞれ次で与えられる：

$$K = \Delta^{-4}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2), \qquad H = \frac{\Delta^{-3}}{2}\bigl((1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}\bigr).$$

問題

1-1 正の定数 a と実定数 b に対して，$p(u,v) := \bigl(a\operatorname{sech} v\cos u, a\operatorname{sech} v\sin u, a(v-\tanh v)+bu\bigr)$ とおく．

(1) 写像 $p\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を曲面のパラメータ表示とみなしたとき，特異点集合 ($\subset\mathbb{R}^2$) を求めなさい．

(2) 写像 p の特異点でない点（**正則点** regular point という）でのガウス曲率・平均曲率を求めなさい．

1-2 関数 $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $F(x,y,z) := x^4+y^4+z^4-1$ で定めるとき，$F^{-1}(\{0\})$ は，なめらかな曲面を定める．この曲面の，点 (a,b,c) におけるガウス曲率と，その最大値を求めなさい．