幾何学概論第二 (MTH.B212)

0: 準備

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 03 日

目標

事実

- $\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された $\boxed{C^\infty\text{-級写像}}$ C^∞-級関数

$\dfrac{\partial p}{\partial u}$

$$p\colon U \ni (u,v) \longmapsto \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \in \mathbb{R}^3$$

が，U の各点で「p_u と p_v が一次独立」という性質を満たしているならば p は「なめらかな曲面」を与える．

- $\mathbb{R}^3$ の領域 D 上で定義された C^∞-関数 $F\colon D \to \mathbb{R}$ に対して $S := F^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ とする．このとき $dF = (F_x, F_y, F_z) \neq \mathbf{0}$ が S の各点で成り立つなら S は「なめらかな曲面」である．

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$

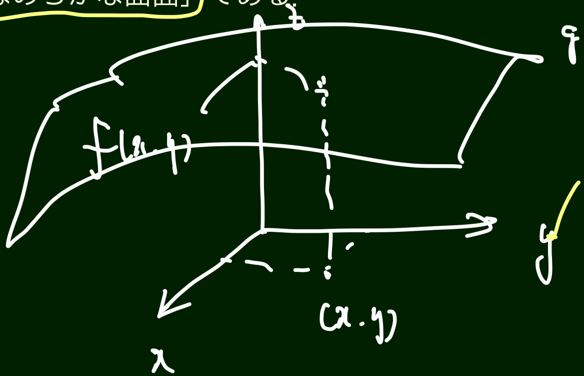
$$S = F^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,;\, F(x,y,z)=0\}$$

関数のグラフ

$\mathbb{R}^2$ の領域 W 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ のグラフ

$$\left\{\left(x, y, f(x,y)\right) ; (x,y) \in W\right\}$$

は「なめらかな曲面」である.



graph of f

球面

関数のグラフになれない

定理 (逆写像定理)

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級写像

$$F\colon U \ni (u,v) \mapsto F(u,v) = \bigl(\xi(u,v), \eta(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^2$$

のヤコビ行列式　Jacobian　Jacobian matrix

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{pmatrix} = \xi_u\eta_v - \xi_v\eta_u$$

が $\boldsymbol{a} \in U$ で零でないとすると，$\boldsymbol{a}$ の近傍 V で次を満たすものが存在する：

- $F|_V\colon V \to \mathbb{R}^2$ は単射,
- $(F|_V)^{-1}\colon F(V) \to U$ は C^∞-級.

逆写像定理

系

$\mathbb{R}^2$ の領域 U から $\mathbb{R}^3$ への C^∞-級写像

$$p\colon U \ni (u,v) \mapsto p(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\bigr)$$

が

(x_u, y_u, z_u) $=$ (x_v, y_v, z_v) $=$

$$(a,b) \in U \text{ において } p_u(a,b) \text{ と } p_v(a,b) \text{ は一次独立}$$

を満たすならば，(a,b) の近傍 V と $\mathbb{R}^2$ の領域 W 上の C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$\text{像 } p(V) \text{ は } f \text{ のグラフ } \bigl\{\bigl(x,y,f(x,y)\bigr)\,;\,(x,y) \in W\bigr\} \text{ と合同}$$

である．

黒板

$p_u = (x_u \ \ y_u \ \ z_u)$ $\qquad$ $p_v = (x_v \ \ y_v \ \ z_v)$

・ p_u と p_v が 1次独立

$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ ① or $\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \neq 0$ ② or $\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \neq 0$

$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$

①

$(u, v) \mapsto (x, y)$ が十分小さいならば単射

$(u(x,y), v(x,y)) \xleftarrow{C^\infty} (x, y)$

$$p(u(x,y), v(x,y)) = \Big(x, y, \boxed{\underset{\substack{\| \\ f(x,y)}}{z(u(x,y), v(x,y))}}\Big)$$

② $(y, z) \mapsto (u, v)$ $\qquad$ $x = f(y, z)$

正則曲面

定義

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級写像

$$p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \ni (u, v) \longmapsto p(u, v) = \bigl(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\bigr) \in \mathbb{R}^3$$

の特異点とは singular point

逆写像定理の仮定をみたさない

$p_u(u_0, v_0)$ と $p_v(u_0, v_0)$ が一次従属となるような点 $(u_0, v_0) \in U$

のこと.

写像 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が特異点をもたないとき,

正則にパラメータ付けられた曲面，正則曲面

という.

この講義で扱う対象

グラフは正則曲面

例

領域 $W \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 f のグラフ
$p\colon W \ni (x,y) \mapsto p(x,y) = \bigl(x, y, f(x,y)\bigr) \in \mathbb{R}^3$ は正則曲面である.

$p_x = (1, 0, f_x)$
$p_y = (0, 1, f_y)$ ∴ 1次独立

事実

写像 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面ならば，各点 $\boldsymbol{a} = (u_0, v_0) \in U$ の近傍 V で次を満たすものが存在する：

$p|_V$ の像 $p(V)$ は関数 $f(x,y)$ のグラフと合同である.

陰関数定理

定理 (陰関数定理)

$\mathbb{R}^3$ の領域 U 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in U$ で (a) $F(\boldsymbol{a}) = 0$; (b) $F_z(\boldsymbol{a}) \neq 0$ を満たすとき，$\boldsymbol{a}$ の近傍 V と $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ の近傍 W 上の C^∞-級関数 f が存在して $F^{-1}(\{0\}) \cap V = \{(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{w}))\,;\,\boldsymbol{w} \in W\}$，とくに $F(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{w})) = 0$ $(\boldsymbol{w} \in W)$ が成り立つ.

陰 $F(x, y, z) = 0$

$$\begin{cases} F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \\ F(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

(x_0, y_0, z_0) の近くでは

$\Longleftrightarrow$ $z = f(x, y)$ (陽)

陰関数定理

系

$\mathbb{R}^3$ の領域 U 上の C^∞-級関数 F が，$\boldsymbol{a} \in U$ で $\boxed{F = 0}$，$\boxed{dF = (F_x, F_y, F_z) \neq \mathbf{0}}$ を満たすならば，$\boldsymbol{a}$ の近傍 V，$\mathbb{R}^2$ の領域 W，C^∞-級関数 $f \colon W \to \mathbb{R}$ が存在して，$F^{-1}(\{0\}) \cap V$ は f のグラフと合同である．

$\{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$

$F_z = 0 \Rightarrow$ 座標軸の役割を入れかえる
(合同変換)

正則曲面

例

C^∞-級関数 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対して $S := F^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ かつ S の各点で $dF \neq \mathbf{0}$ ならば，各 $\mathrm{P} \in S$ の近傍 V が存在して $S \cap V$ は正則曲面の像である．
このとき S 自身を正則曲面ということもある．

例

正の整数 m に対して $F(x,y,z) := x^m + y^m + z^m - 1$ とすると

$$S := F^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, F(x,y,z) = 0\} \neq \phi$$

$(1,0,0) \in S$

は正則曲面である．

$dF = m(x^{m-1}, y^{m-1}, z^{m-1}) \neq 0$ on S

$\Leftrightarrow x = y = z = 0$

接ベクトル空間

定義

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の点 $(u_0, v_0) \in U$ に対して

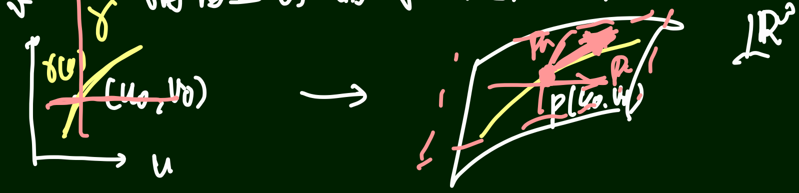
多様体論

$$dp\left(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2\right) := \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \boxed{p \circ \gamma(t)} \,;\, \gamma \in C^\infty\big((-\varepsilon, \varepsilon), U\big), \gamma(0) = (u_0, v_0) \right\}$$

曲面に $p(u_0,v_0)$ で接するベクトル全体

を p の点 (u_0, v_0) における接ベクトル空間という.

曲面上の曲線の速度ベクトル全体



接ベクトル空間

補題

正則曲面 p に対して

$$dp\bigl(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2\bigr)$$
$$= \mathrm{Span}\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\} = \bigl(p_u(u_0,v_0)\times p_v(u_0,v_0)\bigr)^{\perp}.$$

とくに，接ベクトル空間の次元は 2.

ベクトル積

直交補空間

接ベクトル空間

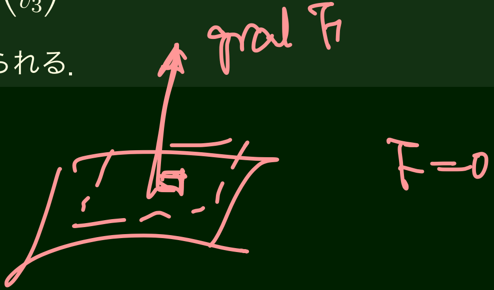
補題

正則曲面 $S = F^{-1}(\{0\})$ 上の (a, b, c) における接ベクトル空間は

$$\big(\operatorname{grad} F(a,b,c)\big)^{\perp} = \big(F_x(a,b,c), F_y(a,b,c), F_z(a,b,c)\big)^{\perp}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} ; v_1 F_x(a,b,c) + v_2 F_y(a,b,c) + v_3 F_z(a,b,c) = 0 \right\}$$

で与えられる.



黒板