幾何学概論第二 (MTH.B212)

1: Gauss 曲率・平均曲率

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 03 日

目標

正則曲面 $\boxed{p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \ni (u,v) \mapsto p(u,v) \in \mathbb{R}^3}$ に対して次の量を定義する：

p_u と p_v が 1次独立

- 単位法線ベクトル場 $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$, $|\nu| = 1$.
- 第一基本量：$E = p_u \cdot p_u$, $F = p_u \cdot p_v$, $G = p_v \cdot p_v$.
- 第二基本量：
  $L = -p_u \cdot \nu_u$, $M = -p_u \cdot \nu_v = -p_v \cdot \nu_u$, $N = -p_v \cdot \nu_v$.
- Weingarten 行列 A：

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}, \qquad \widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

- Gauss 曲率 $K = \det A$, 平均曲率 $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$.

単位法線ベクトル

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が与えられているとき，

定義

点 $(u,v) \in U$ における接ベクトル空間 $dp\bigl(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2\bigr)$ に直交する単位ベクトル $\nu(u,v)$ を p の単位法線ベクトル，ν を (u,v) のベクトル値関数とみなすとき単位法線ベクトル場という．

- 各点における単位法線ベクトルの取り方は二通りある．
- $dp\bigl(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2\bigr)$ は $p_u(u,v)$ と $p_v(u,v)$ ではられるベクトル空間だから，その直交補空間はベクトル積 $p_u(u,v) \times p_v(u,v)$ で生成される．したがって

(両側の"方向"を与えている)

$$\nu(u,v) = \pm\frac{p_u(u,v) \times p_v(u,v)}{|p_u(u,v) \times p_v(u,v)|}$$

は単位法線ベクトル場を与える．

第一基本量

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が与えられているとき,

p_u, p_v : 1次独立

定義 (第一基本量)

内積

3 つの関数 $E = p_u \cdot p_u$, $F = p_u \cdot p_v$, $G = p_v \cdot p_v$ を p の第一基本量という.

補題

$E = E(u,v)$ etc

正則曲面 p の第一基本量 E, F, G は $EG - F^2 > 0$ を満たす.

証明.

正則性から Schwarz の不等式 $|p_u|^2|p_v|^2 \geq |p_u \cdot p_v|^2$ の等号は成立しない. □

$E\ G > F$

第一基本量

第一基本行列：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

>0 >0

- 対称行列 ✓
- 正定値とくに正則行列
- $|p_u \times p_v|^2 = \det \widehat{I} = EG - F^2.$

$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$

第二基本量

法ベ: normal

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場 ν をとるとき,

補題

$p_u \cdot \nu_u = -p_{uu} \cdot \nu$, $p_u \cdot \nu_v = -p_{uv} \cdot \nu = p_v \cdot \nu_u$, $p_v \cdot \nu_v = -p_{vv} \cdot \nu$.

$$\cdot \quad p_u \cdot \nu_v = (p_u \cdot \nu)_v - p_{uv} \cdot \nu$$

$$= -p_{uv} \cdot \nu = -p_{vu} \cdot \nu = p_v \cdot \nu_u$$

定義 (第二基本量; 第二基本行列)

$L := -p_u \cdot \nu_u = \boxed{p_{uu} \cdot \nu}$, $M := -p_u \cdot \nu_v = p_{uv} \cdot \nu = p_v \cdot \nu_u$,
$N := -p_v \cdot \nu_v = p_{vv} \cdot \nu$;

$$\widehat{I\!I} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場 ν をとるとき,

定義 (Weingarten 行列, Gauss 曲率, 平均曲率)

Weingarten行列

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$K := \det A = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \qquad \text{(Gauss 曲率)}$$

Curvature
die Krümmung

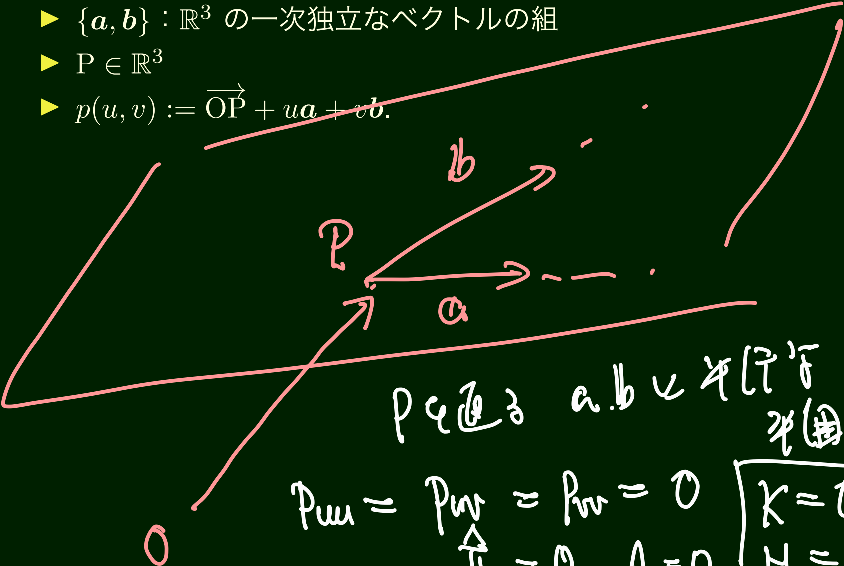
$$H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} A = \frac{EN - 2FM + G\cancel{M}}{2(EG - F^2)} \qquad \text{(平均曲率)}$$

L

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad \widehat{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

第1

- $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$: $\mathbb{R}^3$ の一次独立なベクトルの組
- $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^3$
- $p(u, v) := \overrightarrow{\mathrm{OP}} + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$.



Pを通る a, b と平行な平面

$p_{uu} = p_{uv} = p_{vv} = 0$

$= 0,\ A = 0$

$K = 0$
$H = 0$

例（グラフ）

- $f\colon \mathbb{R}^2 \supset W \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ (C^∞-級)
- $p(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big)$

$p_x = (1, 0, f_x)$ $p_y = (0, 1, f_y)$

$p_x \times p_y = (-f_x, -f_y, 1)$

$\nu = \dfrac{(\pm)\quad 1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1)$

グラフ

$$p(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

$p_x = (1, 0, f_x)$, $p_y = (0, 1, f_y)$ $\nu = \frac{1}{\sqrt{}}(-f_x, -f_y, 1)$

$E = 1 + f_x^2$ $F = f_x f_y$, $G = 1 + f_y^2$

$EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$

$p_{xx} = (0, 0, f_{xx})$

$L = p_{xx} \cdot \nu = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$

…

K, H

例（回転面）

- $\bigl(x(v), z(v)\bigr)$：xz-平面上の正則曲線で $x > 0$.
- $p(u, v) = \bigl(x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v)\bigr)$.

回転面

$$p(u, v) = \bigl(x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v)\bigr)$$

例（球面）

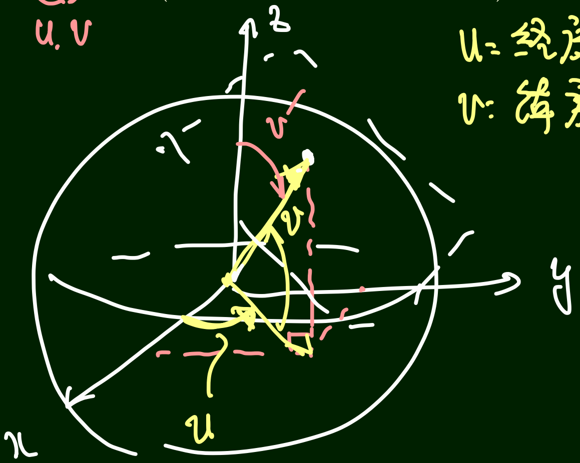
- $p(\cancel{x, y}) = R\big(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\big).$

u, v

R > 0

u: 経度

v: 緯度



球面

(u,v)

$p(\cancel{x,y}) = R(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$

$p_u = R\cos v\,(-\sin u, \cos u, 0)$

$p_v = R(-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, \cos v)$

$E = R^2\cos^2 v, \quad F = 0 \quad G = R^2$

$\nu = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$

$\vdots$

$$\left(K = \frac{1}{R^2}, \quad H = \frac{-1}{R} \right)$$

問題点

- 今回定義した量の不変性：第 2 回
  - $\mathbb{R}^3$ の合同変換に関する不変性
  - パラメータ変換に関する不変性
- 曲率の幾何学的な意味：第 3 回
- 曲面を決定する不変量：第 4, 5 回
- 曲率と曲面の大域的な性質：第 6 回 — Gauss-Bonnet

E, F, G, L, M, N = 曲面を決定する

Gauss の驚異の定理.

問題 1-1

問題

正の定数 a と実定数 b に対して,
$p(u,v) := \bigl(a\,\mathrm{sech}\,v\cos u, a\,\mathrm{sech}\,v\sin u, a(v-\tanh v)+bu\bigr)$ とおく.

1. 写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を曲面のパラメータ表示とみなしたとき, 特異点集合 ($\subset \mathbb{R}^2$) を求めなさい.
2. 写像 p の特異点でない点（正則点 regular point という）でのガウス曲率・平均曲率を求めなさい.

問題 1-2

問題

関数 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $F(x, y, z) := x^4 + y^4 + z^4 - 1$ で定めるとき，$F^{-1}(\{0\})$ は，なめらかな曲面を定める．この曲面の，点 (a, b, c) における ガウス曲率と，その最大値を求めなさい．

$$\left(\begin{array}{c} z = f(x, y) \\ \text{Graph表示} \end{array} \right)$$