幾何学概論第二 (MTH.B212)

2: お知らせ

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 10 日

お知らせ

- 30 名の方から課題の提出がありました．受講登録は 42 名．
  - A4 サイズにしてくださらなかった方，1 名．
  - 2 ページを 1 ファイルにしてくださらなかった方，1 名．
- 課題は T2SCHOLA でフィードバックしています．
- 講義資料なども T2SCHOLA をご利用ください．

授業の感想など

- 計算ミスが多く，何回も計算し直してしまうのですが，何に気をつけたら計算ミスが減りますか？
  山田のコメント： ステップ毎の検算．おかしいと思う感覚？
- 1-1 の 2 は途中の式が複雑になりすぎで，計算できませんでした．．．． 山田のコメント： やってみましょうね．
- 今回の 1-1 計算量はこの講義においてどのくらいですか．
  山田のコメント： 多い方．
- 初めて TeX（元文ママ：TEX?）ファイルの書き換えで書いてみましたが，思ったより複雑でした．今度は名前だけ打っておいて普通に手書きします． 山田のコメント： はい．
- 「平均」「H」と聞いて，真っ先に調和平均 (harmonic mean) と思ったが，平均曲率とは平均のとり方が違うのでこの説は取り下げます．
  山田のコメント： 「調和平均曲率」っていうのもあります．

質問と回答

Q

- 単位法線ベクトルの取り方は 2 つありますが，どちらでもよいのかと疑問に思った．
- 第 2 基本量を定めるときの ν は $\pm\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}$ の $+$ と $-$ をどちらにとってもよいとありましたがそれはなぜなのでしょうか． $+$ をとったときと $-$ をとったときの Gauss 曲率，平均曲率をそれぞれ K^+, K^-, H^+, H^- とかくと，第 2 基本量の符号が変化することから K^+ =(中略) K^-，同様に H^+ =(中略) H^- となり，Gauss 曲率はどちらをとっても同じだが，平均曲率は変わってしまいます．また，第 4, 5 回の予告で E, F, G, L, M, N で曲面は決定するとありましたが，そであれば L, M, N が異なる値をとることは異なる曲面を表していることになるかもしれないと思いました．

A

どちらか一方をとって固定する．K は不変．H は符号が変わる．

質問と回答

Q

例えば $p(u,v) = \left(\frac{\cos u}{1+\sin^2 u}, \frac{\sin u \cos u}{1+\sin^2 u}, v\right)$ $(-\pi < u \leqq \pi)$ **（**xy **座標上（原文ママ：**xy **平面上）のレムニスケートを** z **方向にのばした（原文ママ：平行移動した）ような曲面）は特異点をもたないのですが，陰関数表示すると** z **軸上で特異点をもつということでしょうか．**

A

はい．
曲線の場合と同様，陰関数表示とパラメータ表示では異点の意味が違います．

質問と回答

Q

第一基本量の補題：$EG - F^2 > 0$ の証明で正則性とありますが，正則性とは何なのでしょうか．正則について調べてみると正しい規則とありましたが，今回の場合は一次従属であるという規則が正則に当たるのでしょうか．

A

違います．曲面が「正則曲面であること」です．

Q

曲線のときと曲面のときで正則の定義が大きく違うように見えるが，これらの定義に関係はありますか．

A

本質的に同じです．曲線 γ の正則性は $\dot{\gamma} \neq 0$．これは（一つのベクトル）$\dot{\gamma}$ が 1 次独立であることと同値です．

質問と回答

Q

p_u と p_v が一次独立でない時，p_u と p_v とともに 0 でなく一次従属な場合と，p_u と p_v がともに 0 の場合では幾何的な違いは生じますか？

A

はい，特異点としての性質が違います（が結構複雑です）．ここでは深入りしません．

Q

曲面の特異点における第一基本量の値には何か意味があるのでしょうか？

A

はい．例えばある種の特異点集合に第一基本量のみから曲率を定義することができます（特異曲率：佐治-梅原-山田，2009）．

質問と回答

Q

単位法線ベクトル場を考えるときに，曲面の向き付け可能性を考慮する必要はないのでしょうか．例えばメビウスの輪（式省略）を考えると，輪に沿って一周すると法ベクトルの向きが反転するため，輪を 2 周分，3 周分と拡張すると基本量や曲率に様々な矛盾が生じるように思えます．

A

その通り．今は $\mathbb{R}^2$ の領域に限っているのでその心配はいりません．

質問と回答

Q

0:準備の逆写像定理のところで $p\big(u(x,y),v(x,y)\big)=(x,y,z(u(x,y),v(x,y)))$ となるとあったのですが，
$x(u(x,y),v(x,y)),y(u(x,y),v(x,y))$ が x と y に等しいのは何故ですか？$(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ の関係から言える理由が分かりませんでした．

A

$(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v))$ の逆写像が $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ だから，逆写像の定義よりご質問の式が成り立ちます．

質問と回答

Q

講義資料の補題 0.7 の証明は $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Span}\{p_u, p_v\})$ **までしか言えていない気がするのですがどうでしょうか．**
$\mathrm{Span}\{p_u, p_v\}$ **の元** $ap_u + bp_v$ $(a, b \in \mathbb{R})$ **を任意にとり，**
$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ **を** $\gamma(t) = (at + u_0, bt + v_0)$ **で定めれば**
$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p \circ \gamma(t) = ap_u(u_0, v_0) + bp_v(u_0, v_0)$ **になることから**
$\mathrm{Span}\{p_u, p_v\} \subset dp(T_{(u_0,u_0)}\mathbb{R}^2)$ **で確かに成立することが確認できますが，こんなことをしなくても講義資料の証明だけから**
$dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Span}\{p_u, p_v\})$ **は言えているのでしょうか？**

A

おっしゃるとおりで片側の包含関係しか言っていません．逆向きの包含関係は，ご質問中の証明がもっとも簡単だと思います．

講義資料の証明は省略が多く，完全でないと思ってください．

質問と回答

Q

- 曲面における弧長パラメータのような特殊なパラメータのとり方はあるのでしょうか．(p_u, p_v の大きさに調整が入れられないかと思ったが，方針が立たず残念)
- 曲線のときは $|\gamma'(s)| = 1$ となるようなパラメータ表示を特に弧長パラメータとしており，弧長パラメータによりパラメータづけられる曲線では曲率の公式がすっきりと書かれていました．Gauss 曲率などでも同様のものがあるでしょうか．すなわち $EG - F^2 = 1$ のときに特殊な幾何学的意味があるのでしょうか．

A

ない．