幾何学概論第二 (MTH.B212)

1: Gauss 曲率・平均曲率 (補足)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 10 日

例（回転面）

- $\bigl(x(v), z(v)\bigr)$：xz-平面上の正則曲線で $x>0$．
- $p(u,v)=\bigl(x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v)\bigr)$．

回転面

$$\begin{aligned}
p(u,v) &= \begin{pmatrix}\cos u & -\sin u & 0\\ \sin u & \cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(v)\\ 0\\ z(v)\end{pmatrix}\\
&= x(v)\boldsymbol{e}_1(u)+z(v)\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{e}_1(u)=\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2(u)=\begin{pmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_1'(u),\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

回転面

$$p(u,v)=x(v)\boldsymbol{e}_1(u)+z(v)\boldsymbol{e}_3$$

例（半径 1 の球面）

$$p(u,v)=\bigl(\cos v\cos u, \cos v\sin u, \sin v\bigr)=\cos v\,\boldsymbol{e}_1(u)+\sin v\,\boldsymbol{e}_3$$

問題 1-1

問題

正の定数 a と実定数 b に対して，

$$p(u,v):=\bigl(a\operatorname{sech} v\cos u, a\operatorname{sech} v\sin u, a(v-\tanh v)+bu\bigr)$$

とおく．

1. **写像 $p\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を曲面のパラメータ表示とみなしたとき，特異点集合 ($\subset\mathbb{R}^2$) を求めなさい．**
2. **写像 p の特異点でない点でのガウス曲率・平均曲率を求めなさい．**

問題 1-1

$$\begin{aligned}
p(u,v) &= \begin{pmatrix}\cos u & -\sin u & 0\\ \sin u & \cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\operatorname{sech} v\\ 0\\ a(v-\operatorname{sech} v)\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\0\\b\end{pmatrix}\\
&= a\operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_1(u)+\bigl(a(v-\tanh v)+bu\bigr)\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}$$

問題 1-1

$$p(u,v)=a\operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_1(u)+\bigl(a(v-\tanh v)+bu\bigr)\boldsymbol{e}_3.$$

$$\begin{aligned}
p_u &= a\operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3,\\
p_v &= -a\operatorname{sech} v\tanh v\,\boldsymbol{e}_1+a\tanh^2 v\,\boldsymbol{e}_3\\
&= a\tanh v\bigl(-\operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_1+\tanh v\,\boldsymbol{e}_3\bigr)\\
\nu &= \frac{1}{c}(a\tanh v\,\boldsymbol{e}_1-b\boldsymbol{e}_2+a\operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_3)\qquad c=\sqrt{a^2+b^2}\\
p_{uu} &= -a\operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_1\\
p_{uv} &= -a\operatorname{sech} v\tanh v\,\boldsymbol{e}_2\\
p_{vv} &= a\operatorname{sech} v\bigl((2\tanh^2 v-1)\boldsymbol{e}_1+2\tanh v\operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_3\bigr)
\end{aligned}$$

問題 1-1

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} c^2 - a^2\tanh^2 v & ab\tanh^2 v \\ ab\tanh^2 v & a^2\tanh^2 v \end{pmatrix}, \quad \det\widehat{I} = a^2c^2\tanh^2 v\,\mathrm{sech}^2\, v$$

$$\widehat{II} = \frac{a}{c}\tanh v\,\mathrm{sech}\, v\begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{1}{ac\,\mathrm{sech}\, v\tanh v}\begin{pmatrix} -a\tanh^2 v & 0 \\ b & a\,\mathrm{sech}^2\, v \end{pmatrix}$$

$$\boxed{K = \frac{-1}{c^2}, \qquad H = \frac{1}{2c}(\mathrm{cosech}\, v - \sinh v)}$$

問題 1-1

$p(u,v) = a\,\mathrm{sech}\, v\,\boldsymbol{e}_1(u) + a(v - \tanh v)\boldsymbol{e}_3 + bu\boldsymbol{e}_3.$

- **xz-平面上の追跡線 $a(\mathrm{sech}\, v, v - \tanh v)$ の螺旋運動による軌跡．**
- **負の定 (Gauss) 曲率曲面**

以下 $a^2 + b^2 = 1$ とする．

- **定 Gauss 曲率 -1 の曲面 Dini の擬球面**
- **$a = 1,\ b = 0$ のときは Beltrami の擬球面**
- **Gauss 曲率，平均曲率を保った曲面の変形**

問題 1-2

問題

関数 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $F(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^4 - 1$ で定めるとき，$F^{-1}(\{0\})$ は，なめらかな曲面を定める．この曲面の，点 (a,b,c) におけるガウス曲率と，その最大値を求めなさい．

$$S := F^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z)\,;\, F(x,y,z) = 0\}$$
$$dF = 4(x^3,y^3,z^3) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$$
$$dF \neq (0,0,0) \quad \text{on} \quad S$$

問題 1-2

$$S := F^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z)\,;\, F(x,y,z) = 0\}$$
$$dF = 4(x^3,y^3,z^3)$$
$$S \ni \mathrm{P} = (a,b,c)$$

$c \neq 0$ なら P の近くで S は $z = f(x,y)$ とグラフ表示できる．

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x^3}{z^3},$$
$$f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y^3}{z^3},$$

問題 1-2

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x^3}{z^3}, \qquad f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y^3}{z^3},$$
$$f_{xx} = \frac{3x^2}{z^7}(x^4 + z^4) = \frac{3x^2}{z^7}(1 - y^4),$$
$$f_{xy} = \frac{-3x^3y^3}{z^7},$$
$$f_{yy} = \frac{3y^2}{z^7}(y^4 + z^4) = \frac{3y^2}{z^7}(1 - x^4).$$

$$\boxed{K = \left.\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}\right|_{(x,y,z)=(a,b,c)} = \frac{9a^2b^2c^2}{(a^6 + b^6 + c^6)^2}}$$

問題 1-2

- **$c \neq 0$ ならば**

$$K = \frac{9a^2b^2c^2}{(a^6 + b^6 + c^6)^2}.$$

- **$c = 0$ のときは?**

問題 1-2

$$K = \frac{9a^2b^2c^2}{(a^6 + b^6 + c^6)^2} \leqq \frac{3(a^6 + b^6 + c^6)}{(a^6 + b^6 + c^6)^2} = \frac{3}{a^6 + b^6 + c^6}$$

- **$a^4 + b^4 + c^4 - 1 = 0$ のもとで $a^6 + b^6 + c^6$ が最小となるのは？**