幾何学概論第二 (MTH.B212)

1: Gauss 曲率・平均曲率 (補足)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 10 日

例（回転面）

- $\big(x(v), z(v)\big)$：xz-平面上の正則曲線で $x > 0$．
- $p(u, v) = \big(x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v)\big)$．

回転面

$$
\begin{aligned}
p(u,v) &= \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix} \\
&= x(v)\boldsymbol{e}_1(u) + z(v)\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{e}_1(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1'(u), \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

回転面

$$p(u, v) = x(v)\boldsymbol{e}_1(u) + z(v)\boldsymbol{e}_3$$

例（半径 1 の球面）

$$p(u,v) = \bigl(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\bigr) = \cos v \boldsymbol{e}_1(u) + \sin v\, \boldsymbol{e}_3$$

問題 1-1

問題

正の定数 a と実定数 b に対して，

$$p(u,v) := \bigl(a\,\mathrm{sech}\,v\cos u, a\,\mathrm{sech}\,v\sin u, a(v-\tanh v)+bu\bigr)$$

とおく．

1. **写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を曲面のパラメータ表示とみなしたとき，特異点集合 $(\subset \mathbb{R}^2)$ を求めなさい．**
2. **写像 p の特異点でない点でのガウス曲率・平均曲率を求めなさい．**

問題 1-1

$$
\begin{aligned}
p(u,v) &= \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\operatorname{sech} v \\ 0 \\ a(v - \operatorname{sech} v) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \\
&= a\operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1(u) + \bigl(a(v - \tanh v) + bu\bigr)\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}
$$

問題 1-1

$$p(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + \bigl(a(v - \tanh v) + bu\bigr)\boldsymbol{e}_3.$$

$$\begin{aligned}
p_u &= a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3,\\
p_v &= -a\,\mathrm{sech}\,v\tanh v\,\boldsymbol{e}_1 + a\tanh^2 v\,\boldsymbol{e}_3\\
&= a\tanh v\bigl(-\mathrm{sech}\,v\boldsymbol{e}_1 + \tanh v\,\boldsymbol{e}_3\bigr)\\
\nu &= \frac{1}{c}(a\tanh v\,\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2 + a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_3) \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}\\
p_{uu} &= -a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1\\
p_{uv} &= -a\,\mathrm{sech}\,v\tanh v\,\boldsymbol{e}_2\\
p_{vv} &= a\,\mathrm{sech}\,v\bigl((2\tanh^2 v - 1)\boldsymbol{e}_1 + 2\tanh v\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_3\bigr)
\end{aligned}$$

問題 1-1

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} c^2 - a^2\tanh^2 v & ab\tanh^2 v \\ ab\tanh^2 v & a^2\tanh^2 v \end{pmatrix}, \quad \det \widehat{I} = a^2c^2\tanh^2 v\,\mathrm{sech}^2\, v$$

$$\widehat{II} = \frac{a}{c}\tanh v\,\mathrm{sech}\, v \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{1}{ac\,\mathrm{sech}\, v\tanh v}\begin{pmatrix} -a\tanh^2 v & 0 \\ b & a\,\mathrm{sech}^2\, v \end{pmatrix}$$

$$\boxed{K = \frac{-1}{c^2}, \qquad H = \frac{1}{2c}(\mathrm{cosech}\, v - \sinh v)}$$

問題 1-1

$$p(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + a(v - \tanh v)\boldsymbol{e}_3 + bu\boldsymbol{e}_3.$$

- xz-平面上の追跡線 $a(\mathrm{sech}\,v, v - \tanh v)$ の螺旋運動による軌跡．
- 負の定 (Gauss) 曲率曲面

以下 $a^2 + b^2 = 1$ とする．

- 定 Gauss 曲率 -1 の曲面 Dini の擬球面
- $a = 1$, $b = 0$ のときは Beltrami の擬球面
- Gauss 曲率，平均曲率を保った曲面の変形

問題 1-2

問題

関数 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $F(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^4 - 1$ で定めるとき，$F^{-1}(\{0\})$ は，なめらかな曲面を定める．この曲面の，点 (a,b,c) におけるガウス曲率と，その最大値を求めなさい．

$$S := F^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z)\,;\, F(x,y,z) = 0\}$$

$$dF = 4(x^3, y^3, z^3) = (0,0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = z = 0$$

$$dF \neq (0,0,0) \qquad \text{on} \quad S$$

問題 1-2

$$
\begin{aligned}
S &:= F^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z)\,;\, F(x,y,z)=0\} \\
dF &= 4(x^3, y^3, z^3) \\
S &\ni \mathrm{P} = (a,b,c)
\end{aligned}
$$

$c \neq 0$ なら P の近くで S は $z = f(x,y)$ とグラフ表示できる．

$$
\begin{aligned}
f_x &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x^3}{z^3}, \\
f_y &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y^3}{z^3},
\end{aligned}
$$

問題 1-2

$$
\begin{aligned}
f_x &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x^3}{z^3}, \qquad f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y^3}{z^3},\\
f_{xx} &= \frac{3x^2}{z^7}(x^4+z^4) = \frac{3x^2}{z^7}(1-y^4),\\
f_{xy} &= \frac{-3x^3y^3}{z^7},\\
f_{yy} &= \frac{3y^2}{z^7}(y^4+z^4) = \frac{3y^2}{z^7}(1-x^4).
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{K = \left.\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}\right|_{(x,y,z)=(a,b,c)} = \frac{9a^2b^2c^2}{(a^6+b^6+c^6)^2}}
$$

問題 1-2

- $c \neq 0$ ならば
$$K = \frac{9a^2b^2c^2}{(a^6+b^6+c^6)^2}.$$
- $c = 0$ のときは?

問題 1-2

$$K = \frac{9a^2b^2c^2}{(a^6+b^6+c^6)^2} \leqq \frac{3(a^6+b^6+c^6)}{(a^6+b^6+c^6)^2} = \frac{3}{a^6+b^6+c^6}$$

- $a^4+b^4+c^4-1=0$ **のもとで** $a^6+b^6+c^6$ **が最小となるのは？**