幾何学概論第二 (MTH.B212)

2: パラメータ不変性

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 10 日

目標

命題 (命題 2.2)
$\mathbb{R}^3$ の等長変換で曲面の第一基本量，第二基本量，Gauss 曲率，平均曲率は不変である．

命題 (主張 2.9，系 2.7)
曲面の座標変換（パラメータ変換）で第一基本形式，第二基本形式，Gauss 曲率，平均曲率は不変である．

$\mathbb{R}^3$ の等長変換

$$\mathrm{O}(3) := 3 \text{ 次の直交行列全体}$$
$$\mathrm{SO}(3) := \{P \in \mathrm{O}(3)\,;\, \det P = 1\}$$
$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| \qquad \text{(ユークリッド距離)}$$

事実
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が等長変換

$$\Leftrightarrow \quad d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = d(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})) \qquad (\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^3)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \qquad (P \in \mathrm{O}(3), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$$

曲面の等長変換

$p(u,v)$：正則曲面；$\tilde p(u,v) = Pp(u,v) + \boldsymbol{a}$ $(P \in \mathrm{O}(3),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$
- ν を p の単位法線ベクトル場
  $\Rightarrow \tilde\nu = P\nu$ は $\tilde p$ の単位法線ベクトル場

曲面の等長変換

$p(u,v)$：正則曲面；$\tilde p(u,v) = Pp(u,v) + \boldsymbol{a}$ $(P \in \mathrm{O}(3),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$
- $\tilde p$ の第一基本量は p の第一基本量と一致する．
- $\tilde p$ の $\tilde \nu$ に関する第二基本量は p の ν に関する第二基本量と一致する．

曲面の等長変換

$p(u,v)$：正則曲面；$\tilde p(u,v) = Pp(u,v) + \boldsymbol{a}$ $(P \in \mathrm{O}(3),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$
- $\tilde p$ の Gauss 曲率は p の Gauss 曲率と一致する．
- $\tilde p$ の $\tilde \nu$ に関する平均曲率は p の ν に関する平均曲率と一致する．

座標変換

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset W \ni (\xi,\eta) \mapsto \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr) \in U \subset \mathbb{R}^2$: C^∞-写像
- φ が微分同相 $\Leftrightarrow$ φ は全単射で逆写像 φ^{-1} も C^∞-級．
- Jacobi 行列，Jacobi 行列式：
$$J_\varphi = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} = \det J_\varphi.$$
- 微分同相写像の Jacobi 行列式は零でない．
- $\mathrm{P} \in W$ で φ の Jacobi 行列式が零でないならば P の近傍 V で φ は V から $\varphi(V)$ への微分同相写像．

曲面のパラメータ変換

- $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset W \ni (\xi,\eta) \mapsto \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr) \in U \subset \mathbb{R}^2$: 微分同相
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$: 正則曲面

$$\boxed{\tilde p(\xi,\eta) = p\circ\varphi(\xi,\eta) = p\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr).}$$

- $\tilde p$ は p からパラメータ変換（座標変換）で得られる．
- p と $\tilde p$ の像は一致する．

曲面のパラメータ変換

$\varphi\colon (\xi,\eta)\mapsto (u,v)$: 微分同相；$\tilde{p}=p\circ\varphi$．

- $(\tilde{p}_\xi,\tilde{p}_\eta)=(p_u,p_v)J \qquad J:=J_\varphi=\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}.$
- $\tilde{\nu}=\nu\circ\varphi$ は $\tilde{p}$ の単位法線ベクトル場．
- $(\tilde{\nu}_\xi,\tilde{\nu}_\eta)=(\nu_u,\nu_v)J$．

曲面のパラメータ変換

$\varphi\colon (\xi,\eta)\mapsto (u,v)$: 微分同相；$\tilde{p}=p\circ\varphi$．

- 第一基本行列の変換：$\widetilde{\widehat{I}}={}^tJ\,\widehat{I}\,J$．
- 第二基本行列の変換：$\widetilde{\widehat{II}}={}^tJ\,\widehat{II}\,J$．
- Weingarten 行列の変換：$\widetilde{A}=J^{-1}AJ$

曲面のパラメータ変換

$\varphi\colon (\xi,\eta)\mapsto (u,v)$: 微分同相；$\tilde{p}=p\circ\varphi$．

- Weingarten 行列の変換：$\widetilde{A}=J^{-1}AJ$

定理

- Weingarten 行列の固有値は座標変換で不変である．
- Weingarten 行列の固有値は実数．とくに $H^2-K\geqq 0$．

第一基本形式・第二基本形式

$\varphi\colon (\xi,\eta)\mapsto (u,v)$: 微分同相；$\tilde{p}=p\circ\varphi$．

- 第一基本行列の変換：$\widetilde{\widehat{I}}={}^tJ\,\widehat{I}\,J$．
- 第二基本行列の変換：$\widetilde{\widehat{II}}={}^tJ\,\widehat{II}\,J$．

全微分の定義から

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_\xi\,d\xi+u_\eta\,d\eta \\ v_\xi\,d\xi+v_\eta\,d\eta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}=J\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

なので

$$(d\xi,d\eta)\,\widetilde{\widehat{I}}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}=(d\xi,d\eta){}^tJ\,\widehat{I}\,J\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}=(du,dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

同様に

$$(d\xi,d\eta)\,\widetilde{\widehat{II}}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}=(du,dv)\,\widehat{II}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

第一基本形式・第二基本形式

正則曲面 $p(u,v)$ に対して

$$\begin{aligned} ds^2&=(du,dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}=(du,dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \\ II&=(du,dv)\,\widehat{II}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}=(du,dv)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2 \end{aligned}$$

をそれぞれ第一基本形式，第二基本形式という．

命題

第一基本形式・第二基本形式は座標変換で不変．

例

球面

$$p(u,v)=\bigl(\cos v\cos u,\cos v\sin u,\sin v\bigr)\quad (u,v)\in(-\pi,\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

の第一基本形式は

$$ds^2=\cos^2 v\,du^2+dv^2.$$

これに座標変換を施した曲面

$$\tilde{p}=p\circ\varphi,\qquad (u,v)=\varphi(\xi,\eta)=(\xi,\sin^{-1}\tanh\eta)$$

の第一基本形式は

$$ds^2=\operatorname{sech}^2\eta(d\xi^2+d\eta^2).$$

問題 2-1

問題

領域 $\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された正則曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 II が

$$\begin{aligned} ds^2&=(1-a^2\tanh^2 v)\,du^2+2ab\tanh^2 v\,du\,dv+a^2\tanh^2 v\,dv^2, \\ II&=\tanh v\operatorname{sech} v(-a^2\,du^2+2ab\,du\,dv+a^2\,dv^2) \end{aligned}$$

で与えられるとする．ただし a, b は $a^2+b^2=1$ を満たす定数で $a>0$ となるものとする．このとき，座標変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で

$$ds^2=d\xi^2+2F\,d\xi\,d\eta+d\eta^2,\qquad II=2M\,d\xi\,d\eta$$

となるものを求めなさい．

問題 2-2

問題

正則曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式が

$$ds^2=e^{2\sigma}(du^2+dv^2)$$

となっているとする．ただし σ は (u,v) の C^∞-級関数である．このとき，パラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ によって第一基本形式が

$$ds^2=e^{2\varphi}(d\xi^2+d\eta^2)$$

となるならば，$u=u(\xi,\eta)$，$v=v(\xi,\eta)$ はそれぞれ (ξ,η) の調和関数になることを示しなさい．