

# 幾何学概論第二 (MTH.B212)

2: パラメータ不変性

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

[www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/)

東京工業大学理学院数学系

2020年12月10日

# 目標

## 命題 (命題 2.2)

$\mathbb{R}^3$  の等長変換で曲面の第一基本量，第二基本量，Gauss 曲率，平均曲率は不変である．

## 命題 (主張 2.9，系 2.7)

曲面の座標変換（パラメータ変換）で第一基本形式，第二基本形式，Gauss 曲率，平均曲率は不変である．

# $\mathbb{R}^3$ の等長変換

$O(3) := 3$  次の直交行列全体

$SO(3) := \{P \in O(3); \det P = 1\}$

$d(P, Q) := |\overrightarrow{PQ}|$  (ユークリッド距離)

## 事実

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  が等長変換

$$\Leftrightarrow d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \quad (P, Q \in \mathbb{R}^3)$$

$$\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = P\mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (P \in O(3), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3)$$

## 曲面の等長変換

$p(u, v)$  : 正則曲面 ;  $\tilde{p}(u, v) = Pp(u, v) + \mathbf{a}$  ( $P \in O(3)$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ )

▶  $\nu$  を  $p$  の単位法線ベクトル場

$\Rightarrow \tilde{\nu} = P\nu$  は  $\tilde{p}$  の単位法線ベクトル場

## 曲面の等長変換

$p(u, v)$  : 正則曲面 ;  $\tilde{p}(u, v) = Pp(u, v) + \mathbf{a}$  ( $P \in O(3)$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ )

- ▶  $\tilde{p}$  の第一基本量は  $p$  の第一基本量と一致する .
- ▶  $\tilde{p}$  の  $\tilde{\nu}$  に関する第二基本量は  $p$  の  $\nu$  に関する第二基本量と一致する .

## 曲面の等長変換

$p(u, v)$  : 正則曲面 ;  $\tilde{p}(u, v) = Pp(u, v) + \mathbf{a}$  ( $P \in O(3)$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ )

- ▶  $\tilde{p}$  の Gauss 曲率は  $p$  の Gauss 曲率と一致する .
- ▶  $\tilde{p}$  の  $\tilde{\nu}$  に関する平均曲率は  $p$  の  $\nu$  に関する平均曲率と一致する .

## 座標変換

$\varphi: \mathbb{R}^2 \supset W \ni (\xi, \eta) \mapsto (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \in U \subset \mathbb{R}^2$ :  $C^\infty$ -写像

- ▶  $\varphi$  が微分同相  $\Leftrightarrow \varphi$  は全単射で逆写像  $\varphi^{-1}$  も  $C^\infty$ -級 .
- ▶ Jacobi 行列 , Jacobi 行列式 :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} = \det J_\varphi.$$

- ▶ 微分同相写像の Jacobi 行列式は零でない .
- ▶  $P \in W$  で  $\varphi$  の Jacobi 行列式が零でないならば  $P$  の近傍  $V$  で  $\varphi$  は  $V$  から  $\varphi(V)$  への微分同相写像 .

## 曲面のパラメータ変換

- ▶  $\varphi: \mathbb{R}^2 \supset W \ni (\xi, \eta) \mapsto (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \in U \subset \mathbb{R}^2$ : 微分同相
- ▶  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ : 正則曲面

$$\tilde{p}(\xi, \eta) = p \circ \varphi(\xi, \eta) = p(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)).$$

- ▶  $\tilde{p}$  は  $p$  からパラメータ変換 (座標変換) で得られる .
- ▶  $p$  と  $\tilde{p}$  の像は一致する .



## 曲面のパラメータ変換

$\varphi: (\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ : 微分同相 ;  $\tilde{p} = p \circ \varphi$  .

▶  $(\tilde{p}_\xi, \tilde{p}_\eta) = (p_u, p_v)J$       $J := J_\varphi = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$  .

▶  $\tilde{\nu} = \nu \circ \varphi$  は  $\tilde{p}$  の単位法線ベクトル場 .

▶  $(\tilde{\nu}_\xi, \tilde{\nu}_\eta) = (\nu_u, \nu_v)J$  .

## 曲面のパラメータ変換

$\varphi: (\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ : 微分同相 ;  $\tilde{p} = p \circ \varphi$  .

- ▶ 第一基本行列の変換 :  $\tilde{I} = {}^t J \hat{I} J$  .
- ▶ 第二基本行列の変換 :  $\tilde{II} = {}^t J \hat{II} J$  .
- ▶ Weingarten 行列の変換 :  $\tilde{A} = J^{-1} A J$

## 曲面のパラメータ変換

$\varphi: (\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ : 微分同相 ;  $\tilde{p} = p \circ \varphi$  .

- ▶ Weingarten 行列の変換 :  $\tilde{A} = J^{-1}AJ$

### 定理

- ▶ Weingarten 行列の固有値は座標変換で不変である .
- ▶ Weingarten 行列の固有値は実数 . とくに  $H^2 - K \geq 0$  .

## 第一基本形式・第二基本形式

$\varphi: (\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ : 微分同相 ;  $\tilde{p} = p \circ \varphi$  .

▶ 第一基本行列の変換 :  $\tilde{I} = {}^t J \hat{I} J$  .

▶ 第二基本行列の変換 :  $\tilde{II} = {}^t J \hat{II} J$  .

全微分の定義から

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi d\xi + u_\eta d\eta \\ v_\xi d\xi + v_\eta d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

なので

$$(d\xi, d\eta) \tilde{I} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (d\xi, d\eta) {}^t J \hat{I} J \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (du, dv) \hat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} .$$

同様に

$$(d\xi, d\eta) \tilde{II} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (du, dv) \hat{II} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} .$$

## 第一基本形式・第二基本形式

正則曲面  $p(u, v)$  に対して

$$\begin{aligned} ds^2 &= (du, dv) \hat{I} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II &= (du, dv) \hat{II} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \end{aligned}$$

をそれぞれ第一基本形式, 第二基本形式という.

### 命題

第一基本形式・第二基本形式は座標変換で不変.

## 例

球面

$$p(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \quad (u, v) \in (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

の第一基本形式は

$$ds^2 = \cos^2 v du^2 + dv^2.$$

これに座標変換を施した曲面

$$\tilde{p} = p \circ \varphi, \quad (u, v) = \varphi(\xi, \eta) = (\xi, \sin^{-1} \tanh \eta)$$

の第一基本形式は

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2 \eta (d\xi^2 + d\eta^2).$$

## 問題 2-1

### 問題

領域  $\{(u, v); v > 0\}$  で定義された正則曲面  $p(u, v)$  の第一基本形式  $ds^2$  と第二基本形式  $II$  が

$$ds^2 = (1 - a^2 \tanh^2 v) du^2 + 2ab \tanh^2 v du dv + a^2 \tanh^2 v dv^2,$$
$$II = \tanh v \operatorname{sech} v (-a^2 du^2 + 2ab du dv + a^2 dv^2)$$

で与えられるとする．ただし  $a, b$  は  $a^2 + b^2 = 1$  を満たす定数で  $a > 0$  となるものとする．このとき，座標変換  $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$  で

$$ds^2 = d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + d\eta^2, \quad II = 2M d\xi d\eta$$

となるものを求めなさい．

## 問題 2-2

### 問題

正則曲面  $p(u, v)$  の第一基本形式が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$$

となっているとする。ただし  $\sigma$  は  $(u, v)$  の  $C^\infty$ -級関数である。このとき、パラメータ変換  $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$  によって第一基本形式が

$$ds^2 = e^{2\varphi}(d\xi^2 + d\eta^2)$$

となるならば、 $u = u(\xi, \eta)$ 、 $v = v(\xi, \eta)$  はそれぞれ  $(\xi, \eta)$  の調和関数になることを示しなさい。