2020 年 12 月 10 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 2

■お知らせ

- 30 名の方から課題提出がありました．A4 でない方 1 名，2 ページ 1 ファイルでない方 1 名．

■前回の訂正

- 課題提出用紙の科目名：幾何学概論第一 ⇒ 幾何学概論第二
- 講義資料, 3 ページ，3 行目：$F|_V\colon V \to \mathbb{R}^n \Rightarrow F|_V\colon V \to \mathbb{R}^2$
- 講義資料, 3 ページ，系 0.2 の証明の最後：入れ替える（合同変換）により ⇒ 入れ替える（合同変換）ことにより
- 講義資料, 3 ページ，下から 11 行目：**正則にパラメータづけれた** ⇒ **正則にパラメータづけられた**
- 講義資料, 3 ページ，例 0.5 の 1 行目：f のグラフ ⇒ f の "グラフ"（「グラフ」という語で $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\{(x, y, f(x, y))\}$ を表しているが，ここではそれをパラメータ表示したものもグラフと呼んでしまっているので引用符をつけた）．
- 講義資料, 3 ページ，下から 2 行目：$\dot{u}(t_0) \Rightarrow \dot{u}(0)$; $\dot{v}(t_0) \Rightarrow \dot{v}(0)$.
- 講義資料, 4 ページ，定義 1.4 の 2 行目：**第二基本量，** ⇒ **第二基本量**および
- 映写資料 2, 4 ページ，逆写像定理の主張の 2 行目：$\bigl(\xi(u, v), \eta(u, v)\bigr)\mathbb{R}^2 \Rightarrow \bigl(\xi(u, v), \eta(u, v)\bigr)\in\mathbb{R}^2$
- 映写資料 2, 4 ページ，下から 2 行目：$V \to \mathbb{R}^n \Rightarrow V \to \mathbb{R}^2$
- 映写資料 3, 7 ページ；平均曲率の定義式右辺の分子：$EN - 2FM + GM \Rightarrow EN - 2FM + GL$
- 映写資料 3, 13 ページ，14 ページ：$p(x, y) \Rightarrow p(u, v)$
- 黒板 3, 10 ページ：$\nu = \frac{1}{\sqrt{\ }}(f_x, f_y, 0) \Rightarrow \nu = \frac{1}{\sqrt{\ }}(f_x, f_y, 1)$

■授業に関する御意見

- 計算ミスが多く，何回も計算し直してしまうのですが，何に気をつけたら計算ミスが減りますか？
  山田のコメント： ステップごとの検算．何か「おかしい」と思う感覚？
- 1-1 の 2 は途中の式が複雑になりすぎで，計算できませんでした．... **山田のコメント：** ちょっとやってみましょうね．
- 今回の 1-1 計算量はこの講義においてどのくらいですか． **山田のコメント：** 多い方．
- 初めて TeX（元文ママ：$\TeX$?）ファイルの書き換えで書いてみましたが，思ったより複雑でした．今度は名前だけ打っておいて普通に手書きします． **山田のコメント：** はい．
- 「平均」「H」と聞いて，真っ先に調和平均 (harmonic mean) と思ったが，平均曲率とは平均のとり方が違うのでこの説は取り下げます． **山田のコメント：** 「調和平均曲率」っていうのもあります．

■質問と回答

質問 1： なめらかな曲面であることの定義は，p_u と p_v が U の各点で 1 次独立であることと，$F(x, y, z) = 0$ なる各 (x, y, z) で陰関数表示をしたとき，$dF \neq \mathbf{0}$ となることの 2 つがありますが，これは同値になるという意味ですか？

お答え： いいえ．平面曲線の「パラメータ表示における特異点」と「陰関数表示における特異点」が違うのと同じです．

質問 2： 例えば $p(u, v) = \left(\frac{\cos u}{1+\sin^2 u}, \frac{\sin u \cos u}{1+\sin^2 u}, v\right)$ $(-\pi < u \leqq \pi)$（xy 座標上（原文ママ：xy 平面上）のレムニスケートを z 方向にのばした（原文ママ：平行移動した）ような曲面）は特異点をもたないのですが，陰関数表示すると z 軸上で特異点をもつということでしょうか． **お答え：**はい，そうです．曲線の場合と同様に，パラメータ表示の特異点と陰関数表示の特異点は意味が違います．

質問 3： 教科書にクラインのつぼやツバメの尾など様々な曲面の例が載っていますが，$\mathbb{R}^3$ 上のどんな曲面でも $p\colon \mathbb{R}^2 \supset W \ni (u, v) \mapsto p(u, v) \in \mathbb{R}^3$ とパラメータ表示で表されることはできるのですか？（証明方法も知りたいです） **お答え：**できません．一般の曲面は $\mathbb{R}^2$ の領域と同相にならないので．局所的にご質問のように表されるという性質を曲面の定義にするのもよい．

質問 4： 曲線のときと曲面のときで正則の定義が大きく違うように見えるが，これらの定義に関係はありますか．

お答え： 本質的に同じです．曲線 γ の正則性は $\dot{\gamma} \neq \mathbf{0}$．これは（一つのベクトル）$\dot{\gamma}$ が 1 次独立であることと同値です．

質問 5： p_u と p_v が一次独立でない時，p_u と p_v とともに $\mathbf{0}$ でなく一次従属な場合と，p_u と p_v がともに $\mathbf{0}$ の場合では幾何的な違いは生じますか？ **お答え：**はい，特異点としての性質が違います（が結構複雑です）．ここでは深入りしません．

質問 6： 第一基本量の補題：$EG - F^2 > 0$ の証明で正則性とありますが，正則性とは何なのでしょうか．正則について調べてみると正しい規則とありましたが，今回の場合は一次従属であるという規則が正則に当たるのでしょうか．

お答え： 違います．曲面が「正則曲面であること」です．

質問 7： 曲面の特異点における第一基本量の値には何か意味があるのでしょうか？ **お答え：**はい．ある種の特異点集合に第一基本量のみから曲率を定義することができます（特異曲率：佐治-梅原-山田，2009）．ここでは深入りしません．

質問 8： 単位法線ベクトルの取り方は 2 つありますが，どちらでもよいのかと疑問に思った． **お答え：**どちらでもよいです．

質問 9： 単位ベクトル ν（原文ママ：単位法線ベクトル）で正負どちらをとるかわかりません．常に $\pm$ をつけるべきか，あるいはどちらかに決め打ちすべきですか？ **お答え：**好きな方を選んで決める．

質問 10： 第 2 基本量を定めるときの ν は $\pm\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}$ の $+$ と $-$ をどちらにとってもよいとありましたがそれはなぜなのでしょうか．$+$ をとったときと $-$ をとったときの Gauss 曲率，平均曲率をそれぞれ K^+, K^-, H^+, H^- とかくと，第 2 基本量の符号が変化することから $K^+=$(中略) K^-，同様に $H^+=$(中略) H^- となり，Gauss 曲率はどちらをとっても同じだが，平均曲率は変わってしまいます．また，第 4, 5 回の予告で E, F, G, L, M, N で曲面は決定するとありましたが，そであれば L, M, N が異なる値をとることは異なる曲面を表していることになるかもしれないと思いました．

お答え： 前半：そうです．たとえば半径 1 の球面は外向き法線をとると -1，内向き法線をとると $+1$ です．後半：きちんと述べていませんが，L, M, N の符号を一度に変えても同じ曲面が得られます（が単位法線ベクトルが逆向き）．

質問 11： 単位法線ベクトル場を考えるときに，曲面の向き付け可能性を考慮する必要はないのでしょうか．例えばメビウスの輪（式省略）を考えると，輪に沿って一周すると法ベクトルの向きが反転するため，輪を 2 周分，3 周分と拡張すると基本量や曲率に様々な矛盾が生じるように思えます． **お答え：**その通り．今は $\mathbb{R}^2$ の領域に限っているのでその心配はいりません．

質問 12： 曲面について向きづけをすることを単位法線の符号で表していましたが，メビウスの輪などの向きづけできないものは符号をどう解釈しますか． **お答え：**なので曲面全体で単位法線ベクトル場をうまく定義できません．

質問 13： 授業内に扱っていた 2 つの曲率（Gauss，平均）について「平面の Gauss 曲率，平均曲率は 0」が成り立ちますが，この逆「Gauss 曲率，平均曲率が 0 な曲面は平面」は成り立つのでしょうか．仮定から $L=M=N=0$ が導けましたが，その後の方針が見えず諦めてしまいました．命題の真偽が知りたいです（真ならば方針のヒントもくださると幸いです）． **お答え：**真．テキスト 91 ページ問題 6.

質問 14： Gauss 曲率が 0 のとき，何か面白い特徴はありますか． **お答え：**Gauss 写像の特異点．恒等的 0 はテキスト付録 B-4.

質問 15： 基本量や Weingarten 行列の定義は天下り的だと感じたのですが，どのような都合の良さによってこのような定義になっているのでしょうか． **お答え：**一部は今回のテーマ．

質問 16： 平均曲率の係数 1/2 はどういう意味あいでしょうか． **お答え：**Weingarten 行列の固有値の平均.

質問 17： ガウス曲率は $\det A=\det I^{-1}I\!I=\frac{\det I\!I}{\det I}$ と定義されますが，$\det I=0$ のときはガウス曲率はどうなりますか?

お答え： 正則点ではないのでガウス曲率は定義しない．なお，この講義では $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$ と書きます．

質問 18： 0:準備の逆写像定理のところで $p\bigl(u(x,y),v(x,y)\bigr)=(x,y,z(u(x,y),v(x,y)))$ となるとあったのですが，$x(u(x,y),v(x,y)),y(u(x,y),v(x,y))$ が x と y に等しいのは何故ですか？ $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ の関係から言える理由が分かりませんでした．

お答え： $(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v))$ の逆写像が $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ だから，逆写像の定義よりご質問の式が成り立ちます．

質問 19： 講義でよく登場する「近傍」とは「後ろでの主張をみたすくらいに十分小さい領域」という意味であっていますか？

お答え： そう思っていただいて結構ですが，位相空間論の用語「位相空間 X の点 P を含む X の開集合を P の近傍という」．

質問 20： 講義資料の補題 0.7 の証明は $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)\subset\mathrm{Span}\{p_u,p_v\}$ までしか言えていない気がするのですがどうでしょうか．$\mathrm{Span}\{p_u,p_v\}$ の元 ap_u+bp_v $(a,b\in\mathbb{R})$ を任意にとり，$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ を $\gamma(t)=(at+u_0,bt+v_0)$ で定めれば $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}p\circ\gamma(t)=ap_u(u_0,v_0)+bp_v(u_0,v_0)$ になることから $\mathrm{Span}\{p_u,p_v\}\subset dp(T_{(u_0,u_0)}\mathbb{R}^2)$ で確かに成立することが確認できますが，こんなことをしなくても講義資料の証明だけから $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)\subset\mathrm{Span}\{p_u,p_v\})$ は言えているのでしょうか？

お答え： おっしゃるとおりで片側の包含関係しか言っていません．逆向きの包含関係は，ご質問中の証明がもっとも簡単だと思います．

質問 21： 曲面における弧長パラメータのような特殊なパラメータのとり方はあるのでしょうか．(p_u, p_v の大きさに調整が入れられないかと思ったが，方針が立たず残念)

お答え： 実は「ない」．今回の課題に出てくるパラメータは実は特殊な座標系だが，2-1 のパラメータは特殊な曲面に対してしか存在しない．また 2-2 のようなパラメータは任意の曲面に対して存在する（高次元化は不可）が，一意性が成り立たない．

質問 22： 曲線のときは $|\gamma'(s)|=1$ となるようなパラメータ表示を特に弧長パラメータとしており，弧長パラメータによりパラメータづけられる曲線では曲率の公式がすっきりと書かれていました．Gauss 曲率などでも同様のものがあるでしょうか．すなわち $EG-F^2=1$ のときに特殊な幾何学的意味があるのでしょうか． **お答え：**前半：特殊な座標系のもとでは Gauss 曲率がスッキリ書けますが，そういう座標系の存在自体が非自明．後半：等積座標．次回説明する．

質問 23： 空間曲面 $p\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $(u,v)\mapsto p(u,v)$ は u (または v) を定数にすれば，空間曲線 $p^u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ になると思います．空間曲線には主法線ベクトルと従法線ベクトルがありますが p の法線ベクトル場 ν にはその主法線ベクトルと従法線ベクトルどちらも含まれますか？ **お答え：**主法線ベクトルと従法線ベクトルは一次独立ですから，同じ法線ベクトルに「含まれる」（というのがどういう意味かよくわかりませんが）ことはありません．

質問 24： E, F, G, L, M, N から曲面が決定すると言っていたがいずれか 5 つ以下でも曲面が決定することはありますか．

お答え： E, F, G, L, M, N は実は独立ではないので，特別な場合は少ないデータから曲面が決まります．第 5 回講義．

質問 25： 定理 0.1 の (1), (2) は $F|_V:V\to F(V)$ が微分同相写像である事，全体としてはヤコビ行列式が U 上で至る所 0 でなければ F は局所微分同相写像である事を言っています．ここで局所同相である事を全単射性，逆写像の連続性を調べずに示せるのが美味しいと思います．逆写像定理は C^1-級に拡張できるはずなので，C^1 級 $\sim C^\infty$ 級は景色が似ていて，C^0 級は景色が全く異なりそうですが，この違いは何に由来するのでしょうか． **お答え：**ざっくりいうと「線形近似」できるのが可微分性の強み.

質問 26： 問 1-2 について $G(x,y)=F(x,y,f(x,y))$ として条件付き極値を求める，みたいにやろうとしたのですが，$\nabla G=\mathbf{0}$ になってしまいます．何が問題なのでしょうか． **お答え：**$F(x,y,f(x,y))=0$ なので．

質問 27： 正則曲面は常に「なめらかな曲線」であると分かったのですが，「なめらかな曲面」であるが正則曲線でない曲線は存在するのですか？ **お答え：**原文ママですが，曲線と曲面が混在していて何を質問されているのかわかりません．

質問 28： ガウス曲率球面を曲率円と同様に定義したとき，球面の中心の軌跡が曲面となる条件はあるのでしょうか．

お答え： どうやって「同様に」定義しますか．$K<0$ のときは同じ Gauss 曲率をもつ球面が存在しなかったりします．

2 パラメータ不変性

■等長変換 実正方行列 P が**直交行列**であるとは ${}^tPP = P^tP = I$ (I は単位行列) を満たすことである．3 次直交行列全体の集合を $\mathrm{O}(3)$ と書く．直交行列の行列式は 1 または -1 である．とくに行列式が 1 である 3 次直交行列全体を $\mathrm{SO}(3)$ と書く．

写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が**等長変換**または**合同変換**であるとは, 任意の点 P, Q に対して $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = d(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q}))$ を満たすことである．ただし $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ は $\mathbb{R}^3$ のユークリッド距離を表す.

事実 2.1. 行列 $P \in \mathrm{O}(3)$ と定ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ に対して $f\colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \mapsto P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ 等長変換である[*1]．さらに $\mathbb{R}^3$ の等長変換はこの形のものに限る.

等長変換 $\boldsymbol{x} \mapsto P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ は，$P \in \mathrm{SO}(3)$ のとき**向きを保つ**，そうでないとき**向きを反転する**という.

■等長変換に関する不変性 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して $\tilde{p} := Pp + \boldsymbol{a}$ ($P \in \mathrm{O}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$) とおく.

命題 2.2. 曲面 p の単位法線ベクトル場 ν をとるとき,

- $\tilde{\nu} := P\nu$ は $\tilde{p}$ の単位法線ベクトル場である.
- $\tilde{p}$ の第一基本量は p の第一基本量と一致する.
- $\tilde{p}$ の $\tilde{\nu}$ に関する第二基本量は p の ν に関する第二基本量と一致する.
- $\tilde{p}$ の Gauss 曲率，$\tilde{\nu}$ に関する平均曲率は p の Gauss 曲率，ν に関する平均曲率と一致する.

証明. $\tilde{p}_u = Pp_u$, $\tilde{p}_v = Pp_v$ なので，各量の定義と直交行列の性質 $P\boldsymbol{x} \cdot P\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ から結論が得られる． □

注意 2.3. 単位法線ベクトル場を $\nu := (p_u \times p_v)/|p_u \times p_v|$ で定めたとき，$(\tilde{p}_u \times \tilde{p}_v)/|\tilde{p}_u \times \tilde{p}_v| = \pm P\nu$ となる．ただし $\pm$ の符号は $\det P$ の値.

■微分同相写像 領域 $W \subset \mathbb{R}^2$ から $U \subset \mathbb{R}^2$ への C^∞-級全単射 $\varphi\colon W \ni (\xi,\eta) \mapsto \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr) \in U$ の逆 $\varphi^{-1}\colon (u,v) \mapsto \bigl(\xi(u,v), \eta(u,v)\bigr)$ が C^∞-級であるとき，φ は**微分同相** a diffeomorphism であるという.

補題 2.4. 微分同相写像 $(\xi,\eta) \mapsto (u,v)$ の Jacobi 行列 $J = J_\varphi := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$ は各点で正則行列，すなわち Jacobi 行列式 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} := \det J_\varphi \neq 0$．とくに W の連結性から Jacobi 行列式の符号は W 上一定.

証明： 写像 $\varphi^{-1} \circ \varphi$ は W 上の恒等写像なのでその Jacobi 行列は単位行列 I．一方，チェイン・ルールよりこれは $J_{\varphi^{-1}}J_\varphi$ とかけるので，J_φ は逆行列 $J_{\varphi^{-1}}$ をもつ.

注意 2.5. 第 1 回の定理 0.1 は次のように言い換えられる：$\mathbb{R}^2$ の領域 W 上の C^∞-級写像 $\varphi : (\xi,\eta) \mapsto (u,v)$ の Jacobi 行列式が 1 点 $\mathrm{P} \in W$ で零でなければ，P の近傍 V が存在して $\varphi|_V\colon V \to \varphi(V)$ は微分同相.

■座標変換 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ と，微分同相 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset W \to U$ に対して，$\tilde{p} := p \circ \varphi\colon W \to \mathbb{R}^3$ を **p から座標変換 φ で得られる曲面**，φ を**座標変換**という．$\varphi(\xi,\eta) = \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ と書けば

$$\bigl(p(\xi,\eta) =\bigr)\tilde{p}(\xi,\eta) = p\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr).$$

2020 年 12 月 10 日

[*1] $\mathbb{R}^3$ の元 $\boldsymbol{x}$ は列ベクトルとみなしている．以下「行列をかける」文脈では断りのない限り $\mathbb{R}^3$ の元を列ベクトルとみなす.

命題 2.6. 座標変換 φ の Jacobi 行列を $J := J_\varphi$ と書くとき

1. $(\tilde{p}_\xi, \tilde{p}_\eta) = (p_u, p_v)J$,
2. p の単位法線ベクトル場 ν に対して $\tilde{\nu} := \nu \circ \varphi$ とおけばこれは $\tilde{p}$ の単位法線ベクトル場.
3. $(\tilde{\nu}_\xi, \tilde{\nu}_\eta) = (\nu_u, \nu_v)J$.
4. p, $\tilde{p}$ の第一基本行列をそれぞれ $\widehat{I}$, $\widetilde{\widehat{I}}$，第二基本行列を $\widehat{II}$, $\widetilde{\widehat{II}}$，Weingarten 行列を A, $\widetilde{A}$ とかくと，$\widetilde{\widehat{I}} = {}^tJ\,\widehat{I}\,J$, $\widetilde{\widehat{II}} = {}^tJ\,\widehat{II}\,J$, $\widetilde{A} = J^{-1}AJ$.

証明： チェイン・ルールより 1 が得られる．このことから $\mathrm{Span}\{p_u, p_v\} = \mathrm{Span}\{\tilde{p}_\xi, p_\eta\}$ なので 2 が成り立ち，1 と同様に 3 が成り立つ．$P = (p_u, p_v)$, $N = (\nu_u, \nu_v)$ とおくと $\widehat{I} = {}^tPP$, $\widehat{II} = -{}^tPN$ から 4 が得られる．

系 2.7. Weingarten 行列の固有値，Gauss 曲率，平均曲率は座標変換で不変．さらに Weingarten 行列の固有値は実数である．

証明： 後半のみ示す：与えられた曲面上の点が原点，接平面が xy-平面となるように $\mathbb{R}^3$ の座標系をとり（等長変換），曲面を $z = f(x, y)$ とグラフ表示する (座標変換) と，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ なので $A = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$ となる．これは対称行列なので固有値は実数.

■第一・第二基本形式　関数 $f(u, v)$ に対して $df := f_u\,du + f_v\,dv$ を f の**全微分**，**外微分**または単に**微分**という．座標変換 $\varphi\colon (\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ の Jacobi 行列を $J := J_\varphi$ とすれば，$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$.

定義 2.8. 形式的に $ds^2 := (du, dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ とおいて，それぞれ曲面の**第一基本形式**，**第二基本形式**とよぶ.

主張 2.9. 第一基本形式，第二基本形式は曲面の座標変換で不変である.

証明： 命題 2.6 から $(du, dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (d\xi, d\eta)^t J^{-1} J\,\widetilde{\widehat{I}}\,J J^{-1}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (d\xi, d\eta)\,\widetilde{\widehat{I}}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$.

例 2.10. 球面のパラメータ表示 $p(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$ $(-\pi < u < \pi,\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2})$ から座標変換 $\varphi\colon (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \ni (\xi, \eta) \mapsto (u, v) = (\xi, \sin^{-1}\tanh\eta)$ で得られる曲面 $\tilde{p} = p \circ \varphi$ の第一基本形式は $ds^2 = \mathrm{sech}^2\,\eta(d\xi^2 + d\eta^2)$ である.

問題

2-1 領域 $\{(u, v)\,;\, v > 0\}$ で定義された正則曲面 $p(u, v)$ の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 II が

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (1 - a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2, \\
II &= \tanh v\,\mathrm{sech}\,v(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2)
\end{aligned}
$$

で与えられるとする．ただし a, b は $a^2 + b^2 = 1$ を満たす定数で $a > 0$ となるものとする．このとき，座標変換 $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ で $ds^2 = d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + d\eta^2$, $II = 2M\,d\xi\,d\eta$ となるものを求めなさい.

2-2 正則曲面 $p(u, v)$ の第一基本形式が $ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$ となっているとする．ただし σ は (u, v) の C^∞-級関数である．このとき，パラメータ変換 $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ によって第一基本形式が $ds^2 = e^{2\varphi}(d\xi^2 + d\eta^2)$ となるならば，$u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ はそれぞれ (ξ, η) の**調和関数** harmonic functions になることを示しなさい.