幾何学概論第二 (MTH.B212)

1: Gauss 曲率・平均曲率 (補足)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

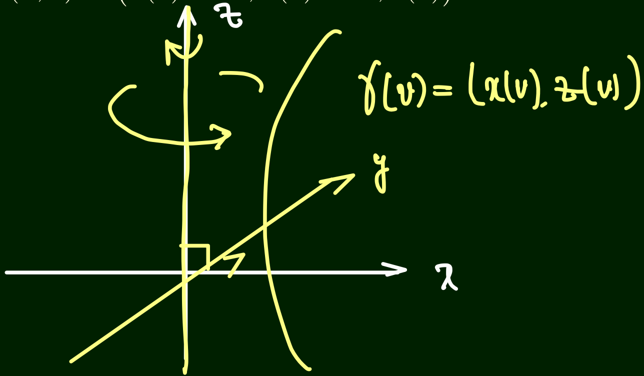
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 10 日

例（回転面）

- $\big(x(v), z(v)\big)$: xz-平面上の正則曲線で $x > 0$.
- $p(u, v) = \big(x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v)\big)$.



回転面

$\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3 \rightarrow$ 正規直交系

xz-平面上の curve

$(\dot{x}, \dot{z}) \neq (0, 0)$

$x > 0$

$$
p(u,v) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}
$$

$$
= \underline{x(v)\boldsymbol{e}_1(u) + z(v)\boldsymbol{e}_3}
$$

$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$

z軸周りの回転

$$
\boldsymbol{e}_1(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}_1'(u)}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

回転面

$p(u,v) = x(v)\boldsymbol{e}_1(u) + z(v)\boldsymbol{e}_3$

$p_u = x\boldsymbol{e}_2 \qquad p_v = \dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{z}\boldsymbol{e}_3$

$\nu = \dfrac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}}(\dot{z}\boldsymbol{e}_1 - \dot{x}\boldsymbol{e}_3)$

$E = p_u \cdot p_u = x^2 \qquad F = p_u \cdot p_v = 0 \qquad G = \dot{x}^2+\dot{z}^2$

$EG - F^2 = x^2(\dot{x}^2+\dot{z}^2)$

$\boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1$

$p_{uu} = -x\boldsymbol{e}_1 \quad p_{uv} = \dot{x}\boldsymbol{e}_2, \quad p_{vv} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_1 + \ddot{z}\boldsymbol{e}_3$

$L = p_{uu}\cdot\nu \; (= -p_u\cdot\nu_u) = \dfrac{-x\dot{z}}{\sqrt{}}$

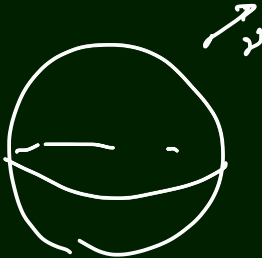
$M = 0 \qquad N = \dfrac{1}{\sqrt{}}(\ddot{x}\dot{z} - \dot{x}\ddot{z})$

例（半径１の球面）

$$p(u,v) = \left(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\right) = \cos v\, \boldsymbol{e}_1(u) + \sin v\, \boldsymbol{e}_3$$

$$\begin{pmatrix} x(v) = \cos v \\ z(v) = \sin v \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \left\} \begin{array}{l} K = 1 \\ H = -1 \end{array}\right.$$



ν : 外向き

問題 1-1

問題

正の定数 a と実定数 b に対して,

$$p(u,v) := \left(a \operatorname{sech} v \cos u,\, a \operatorname{sech} v \sin u,\, a(v - \tanh v) + bu\right)$$

とおく.

$\operatorname{sech} v = \frac{1}{\cosh v}$ $\tanh v = \frac{\sinh v}{\cosh v}$

1. 写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を曲面のパラメータ表示とみなしたとき, 特異点集合 ($\subset \mathbb{R}^2$) を求めなさい.
2. 写像 p の特異点でない点でのガウス曲率・平均曲率を求めなさい.

問題 1-1

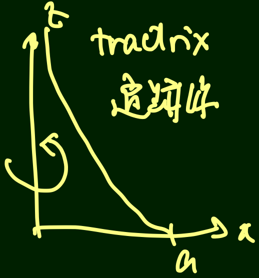
$$p(u,v) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a \operatorname{sech} v \\ 0 \\ a(v - \operatorname{sech} v) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$= a \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1(u) + \big(a(v - \tanh v) + bu\big)\boldsymbol{e}_3.$$

$$\underbrace{P(u)x + u\,b}$$

$\rightarrow$ helical motion

螺旋運動



tractrix

追跡線

問題 1-1

$$p(u,v) = a\operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1(u) + \bigl(a(v-\tanh v) + bu\bigr)\boldsymbol{e}_3.$$

$(\tanh^2 v + \operatorname{sech}^2 v = 1)$

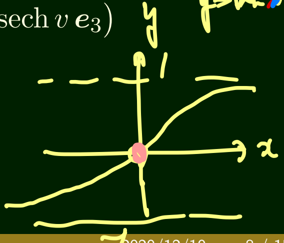
$$
\begin{aligned}
p_u &= a\operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3,\\
p_v &= -a\operatorname{sech} v \tanh v\, \boldsymbol{e}_1 + a\tanh^2 v\, \boldsymbol{e}_3\\
&= a\tanh v\,(-\operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_1 + \tanh v\, \boldsymbol{e}_3)\\
\nu &= \frac{1}{c}(a\tanh v\, \boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2 + a\operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_3) \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}\\
p_{uu} &= -a\operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1\\
p_{uv} &= -a\operatorname{sech} v \tanh v\, \boldsymbol{e}_2\\
p_{vv} &= a\operatorname{sech} v\bigl((2\tanh^2 v - 1)\boldsymbol{e}_1 + 2\tanh v\operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_3\bigr)
\end{aligned}
$$

単位ベクトル

$p_u \neq 0$

$v=0$ で $p_v = 0$ となる点

$y = \tanh x$



問題 1-1

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} c^2 - a^2\tanh^2 v & ab\tanh^2 v \\ ab\tanh^2 v & a^2\tanh^2 v \end{pmatrix}, \qquad \det \widehat{I} = a^2c^2\tanh^2 v\,\mathrm{sech}^2\, v$$

$$\widehat{II} = \frac{a}{c}\tanh v\,\mathrm{sech}\, v \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{1}{ac\,\mathrm{sech}\, v\tanh v}\begin{pmatrix} -a\tanh^2 v & 0 \\ b & a\,\mathrm{sech}^2\, v \end{pmatrix} \qquad \hat{I}^{-1}\hat{II}$$

$$\boxed{K = \frac{-1}{c^2}, \qquad H = \frac{1}{2c}(\mathrm{cosech}\, v - \sinh v)}$$

一定 (<0)

◎ $a^2+b^2=1$

問題 1-1

$$p(u,v) = a\,\mathrm{sech}\,v\,\boldsymbol{e}_1(u) + a(v - \tanh v)\boldsymbol{e}_3 + bu\boldsymbol{e}_3.$$

- xz-平面上の追跡線 $a(\mathrm{sech}\,v, v - \tanh v)$ の螺旋運動による軌跡.
- 負の定 (Gauss) 曲率曲面 C^2

以下 $a^2 + b^2 = 1$ とする.

- 定 Gauss 曲率 -1 の曲面 Dini の擬球面
- $a = 1$, $b = 0$ のときは Beltrami の擬球面　回転面
- Gauss 曲率，平均曲率を保った曲面の変形

非ユークリッド幾何.

Dini's pseudosphere

問題 1-2

問題

関数 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $F(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^4 - 1$ で定めるとき，$F^{-1}(\{0\})$ は，なめらかな曲面を定める．この曲面の，点 (a,b,c) におけるガウス曲率と，その最大値を求めなさい．

$$S := F^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z)\,;\, F(x,y,z) = 0\}$$

$$dF = 4(x^3, y^3, z^3) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$$

$$dF \neq (0,0,0) \quad \text{on} \quad S$$

問題 1-2

$$S := F^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z)\,;\,F(x,y,z) = 0\}$$
$$dF = 4(x^3, y^3, z^3)$$
$$S \ni \mathrm{P} = (a, b, c)$$

$F_z \neq 0$

$c \neq 0$ なら P の近くで S は $\boxed{z = f(x,y)}$ とグラフ表示できる.

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x^3}{z^3},$$
$$f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y^3}{z^3},$$

問題 1-2

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x^3}{z^3}, \qquad f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y^3}{z^3},$$

$$f_{xx} = \frac{3x^2}{z^7}(x^4+z^4) = \frac{3x^2}{z^7}\underline{(1-y^4)},$$

$$f_{xy} = \frac{-3x^3y^3}{z^7},$$

$$f_{yy} = \frac{3y^2}{z^7}(y^4+z^4) = \frac{3y^2}{z^7}(1-x^4).$$

$x^4+y^4+z^4=1$

$$\boxed{K = \left.\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}\right|_{(x,y,z)=(a,b,c)} = \frac{9a^2b^2c^2}{(a^6+b^6+c^6)^2}} \geq 0$$

問題 1-2

- $c \neq 0$ ならば
$$K = \frac{9a^2b^2c^2}{(a^6+b^6+c^6)^2}.$$
- $c = 0$ のときは?

($c \neq 0$ の所から $c=0$ への点列をとってやれば $K \to 0$)

問題 1-2

相加相乗

$$K = \frac{9a^2b^2c^2}{(a^6+b^6+c^6)^2} \leqq \frac{3(a^6+b^6+c^6)}{(a^6+b^6+c^6)^2} = \frac{3}{a^6+b^6+c^6}$$

- $a^4+b^4+c^4-1=0$ のもとで $a^6+b^6+c^6$ が最小となるのは？

Lagrange の未定乗数

$$a^6+b^6+c^6-\lambda(a^4+b^4+c^4-1)$$

min : $a^2=b^2=c^2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

等号.

$3\sqrt{3}$

黒板

- $a \geq 0 \quad b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$

$$a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

$$\text{“}=\text{”} \Leftrightarrow a=b$$

- $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$

$$\text{“}=\text{”} : a=b=c \quad ?$$