幾何学概論第二 (MTH.B212)

2: パラメータ不変性

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 10 日

目標

命題 (命題 2.2)

$\mathbb{R}^3$ の等長変換で曲面の第一基本量，第二基本量，Gauss 曲率，平均曲率は不変である.

命題 (主張 2.9，系 2.7)

曲面の座標変換（パラメータ変換）で第一基本形式，第二基本形式，Gauss 曲率，平均曲率は不変である.

$\mathbb{R}^3$ の等長変換

$${}^tP = P^{-1} \qquad \det P = 1, -1$$

$$\mathrm{O}(3) := 3\text{ 次の直交行列全体} \ni P$$
$$\mathrm{SO}(3) := \{P \in \mathrm{O}(3)\,;\, \det P = 1\}$$
$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| \qquad \text{(ユークリッド距離)}$$

事実

$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が等長変換　　Euclid 距離を保つ変換

$$\Leftrightarrow \quad d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = d(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})) \qquad (\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^3)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \qquad (P \in \mathrm{O}(3), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$$

曲面の等長変換

pから等長変換で得られる曲面

$p(u,v)$：正則曲面；$\tilde{p}(u,v) = Pp(u,v) + \boldsymbol{a}$ $(P \in \mathrm{O}(3),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$

- ν を p の単位法線ベクトル場

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde{\nu} = P\nu}$ は $\tilde{p}$ の単位法線ベクトル場

$\because$ $\tilde{p}_u = Pp_u \qquad \tilde{p}_v = Pp_v$

$$\tilde{\nu}\cdot\tilde{p}_u = P\nu\cdot Pp_u \underset{\text{直交行列}}{=} \nu\cdot p_u = 0$$

$$\tilde{\nu}\cdot\tilde{p}_v = 0$$

$$\tilde{\nu}\cdot\tilde{\nu} = P\nu\cdot P\nu = 1$$

$\tilde{\nu}$： $\tilde{p}_u, \tilde{p}_v$ に直交

$\mathrm{Span}\{\tilde{p}_u, \tilde{p}_v\}$ に直交

曲面の等長変換

$p(u,v)$：正則曲面；$\tilde{p}(u,v) = Pp(u,v) + \boldsymbol{a}$ $(P \in \mathrm{O}(3),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$

- $\tilde{p}$ の第一基本量は p の第一基本量と一致する.
- $\tilde{p}$ の $\tilde{\nu}$ に関する第二基本量は p の ν に関する第二基本量と一致する.

$$\hat{E} = \tilde{p}_u \cdot \tilde{p}_u = Pp_u \cdot Pp_u = p_u \cdot p_u = E$$

$$\hat{L} = -\tilde{p}_u \cdot \tilde{\nu}_u = -Pp_u \cdot P\nu_u = -p_u \cdot \nu_u = L$$

曲面の等長変換

$p(u,v)$：正則曲面；$\tilde{p}(u,v) = Pp(u,v) + \boldsymbol{a}$ $(P \in \mathrm{O}(3),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$

- $\tilde{p}$ の Gauss 曲率は p の Gauss 曲率と一致する.
- $\tilde{p}$ の $\tilde{\nu}$ に関する平均曲率は p の ν に関する平均曲率と一致する.

座標変換

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset W \ni (\xi,\eta) \mapsto \big(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\big) \in U \subset \mathbb{R}^2$: C^∞-写像

- φ が微分同相 $\Leftrightarrow$ φ は全単射で逆写像 φ^{-1} も C^∞-級.
- Jacobi 行列，Jacobi 行列式：

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} = \det J_\varphi.$$

- 微分同相写像の Jacobi 行列式は零でない.
- $\mathrm{P} \in W$ で φ の Jacobi 行列式が零でないならば P の近傍 V で φ は V から $\varphi(V)$ への微分同相写像. 前回 (逆写像定理)

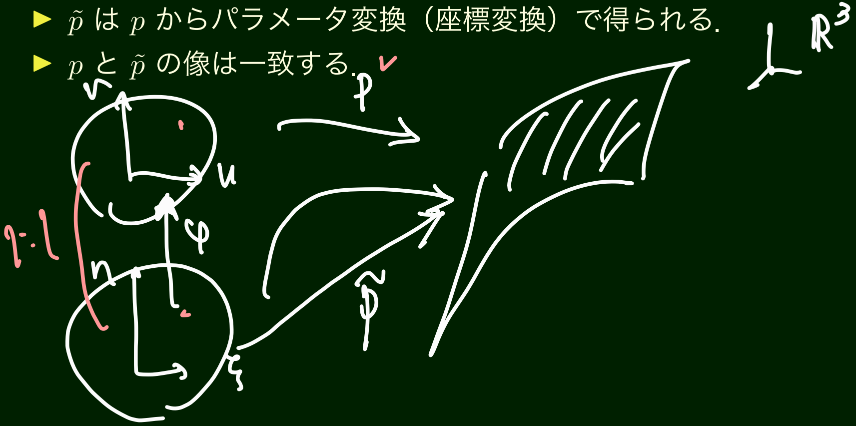
$$p(u,v) = p\big(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\big)$$

曲面のパラメータ変換

- $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \supset W \ni (\xi,\eta) \mapsto \big(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\big) \in U \subset \mathbb{R}^2$: 微分同相
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$: 正則曲面　　$p(u,v)$

$$\boxed{\tilde{p}(\xi,\eta) = p \circ \varphi(\xi,\eta) = p\big(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\big).}$$

- $\tilde{p}$ は p からパラメータ変換（座標変換）で得られる.
- p と $\tilde{p}$ の像は一致する.



$\varphi\colon (\xi,\eta)\mapsto(u,v)$: 微分同相；$\tilde p = p\circ\varphi$.

正則

Span $\{\tilde p_\xi, \tilde p_\eta\}$

列ベクトル

- $(\tilde p_\xi, \tilde p_\eta) = (p_u, p_v)J \qquad J := J_\varphi = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \Rightarrow$

$=$ Span $\{p_u, p_v\}$

- $\tilde\nu = \nu\circ\varphi$ は $\tilde p$ の単位法線ベクトル場.
- $(\tilde\nu_\xi, \tilde\nu_\eta) = (\nu_u, \nu_v)J$.

Chain Rule

$$\tilde p_\xi = p(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))_\xi$$
$$= u_\xi p_u + v_\xi p_v$$
$$\tilde p_\eta = u_\eta p_u + v_\eta p_v$$

3行2列

曲面のパラメータ変換

$\varphi\colon (\xi,\eta)\mapsto(u,v)$: 微分同相；$\tilde{p}=p\circ\varphi$.

- 第一基本行列の変換：$\widetilde{\widehat{I}}={}^tJ\,\widehat{I}\,J$.
- 第二基本行列の変換：$\widetilde{\widehat{II}}={}^tJ\,\widehat{II}\,J$.
- Weingarten 行列の変換：$\tilde{A}=J^{-1}AJ$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}={}^t a\, b$$

$$(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\widehat{I}=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v\\ p_v\cdot p_u & p_v\cdot p_v\end{pmatrix}=\underset{2\times3}{\begin{pmatrix}{}^tp_u\\{}^tp_v\end{pmatrix}}\underset{3\times2}{(p_u\ p_v)}$$

$$\widetilde{\widehat{I}}=\begin{pmatrix}{}^t\tilde{p}_\xi\\{}^t\tilde{p}_\eta\end{pmatrix}(\tilde{p}_\xi\ \tilde{p}_\eta)={}^tJ\underbrace{\begin{pmatrix}{}^tp_u\\{}^tp_v\end{pmatrix}(p_u\ p_v)}_{\widehat{I}}J$$

$$\widehat{II}=-\begin{pmatrix}{}^t\nu_u\\{}^t\nu_v\end{pmatrix}(p_u\ p_v)$$

曲面のパラメータ変換

$\varphi\colon (\xi,\eta)\mapsto(u,v)$: 微分同相；$\tilde{p}=p\circ\varphi$.

- Weingarten 行列の変換 $\boxed{\widetilde{A}=J^{-1}AJ}$

定理

- Weingarten 行列の固有値は座標変換で不変である.
- Weingarten 行列の固有値は実数. とくに $H^2-K\geqq 0$.

$$\hat{A}=\hat{I}^{-1}\hat{II}=({}^tJ\,\hat{I}\,J)^{-1}({}^tJ\,\hat{II}\,J)$$
$$=J^{-1}AJ$$

$\Rightarrow$ K, H : 不変

第一基本形式・第二基本形式

$\varphi\colon (\xi,\eta)\mapsto(u,v)$: 微分同相；$\tilde{p}=p\circ\varphi$.

- 第一基本行列の変換：$\widetilde{\widehat{I}}={}^t J\,\widehat{I}\,J$.
- 第二基本行列の変換：$\widetilde{\widehat{\mathit{II}}}={}^t J\,\widehat{\mathit{II}}\,J$.

全微分の定義から

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi\,d\xi + u_\eta\,d\eta \\ v_\xi\,d\xi + v_\eta\,d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

なので

$$(d\xi,d\eta)\,\widetilde{\widehat{I}}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (d\xi,d\eta)^t J\,\widehat{I}\,J\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (du,dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

座標変換で「不変」

同様に

$$(d\xi,d\eta)\,\widetilde{\widehat{\mathit{II}}}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = (du,dv)\,\widehat{\mathit{II}}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

第一基本形式・第二基本形式

正則曲面 $p(u,v)$ に対して

$$ds^2 = (du, dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$
$$= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$II = (du, dv)\,\widehat{II}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$
$$= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

をそれぞれ第一基本形式，第二基本形式という.

命題

第一基本形式・第二基本形式は座標変換で不変.

例

球面

$$p(u,v) = \bigl(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\bigr) \quad (u,v) \in (-\pi,\pi)\times\Bigl(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Bigr)$$

の第一基本形式は

$$ds^2 = \cos^2 v\, du^2 + dv^2.$$

これに座標変換を施した曲面

$$\tilde{p} = p \circ \varphi, \qquad (u,v) = \varphi(\xi,\eta) = (\xi, \sin^{-1}\tanh\eta)$$

の第一基本形式は

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2\eta(d\xi^2 + d\eta^2).$$

黒板

問題 2-1

問題

領域 $\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された正則曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 $I\!I$ が

$\boxed{a^2+b^2=1}$ 1-1

$$ds^2 = (1-a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2,$$

$$I\!I = \tanh v\,\mathrm{sech}\,v(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2)$$

$(\lambda du+\mu dv)(\sigma du+\tau dv)$

で与えられるとする．ただし a, b は $a^2+b^2=1$ を満たす定数で $a>0$ となるものとする．このとき，座標変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で

η $d\xi$ $d\eta$

$$ds^2 = d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + d\eta^2,\qquad \underline{\underline{I\!I = 2M\,d\xi\,d\eta}}$$

となるものを求めなさい．

12式

問題 2-2

問題

正則曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式が

等温座標

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$$

$E = G$
$F = 0$

となっているとする．ただし σ は (u,v) の C^∞-級関数である．このとき，パラメータ変換 $(\xi,\eta) \mapsto (u,v)$ によって第一基本形式が

$$ds^2 = e^{2\varphi}(d\xi^2 + d\eta^2)$$

となるならば，$u = u(\xi,\eta)$，$v = v(\xi,\eta)$ はそれぞれ (ξ,η) の調和関数になることを示しなさい．

$u = u(\xi, \eta)$ $\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$