幾何学概論第二 (MTH.B212)

2: パラメータ不変性 (補足)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 17 日 (2020/12/24)

問題 2-1

問題

領域 $\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された正則曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 $I\!I$ が

$$ds^2 = (1-a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2,$$
$$I\!I = \tanh v\,\operatorname{sech} v(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2)$$

で与えられるとする．ただし a, b は $a^2+b^2=1$ を満たす定数で $a>0$ となるものとする．このとき，座標変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で $ds^2 = d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + d\eta^2$, $I\!I = 2M\,d\xi\,d\eta$ となるものを求めなさい．

- Dini の擬球の $a^2+b^2=1$ の場合．
- $K=-1$．

問題 2-1 解答（天下り）

座標変換

$$u = -\xi+\eta, \qquad v = -\delta\xi - \frac{1}{\delta}\eta \qquad \left(\delta := \frac{a}{1+b}\right)$$

により

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1-a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2 \\ &= d\xi^2 + 2(2\tanh^2 v - 1)\,d\xi\,d\eta + d\eta^2 \\ &= d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + d\eta^2, \\ I\!I &= \tanh v\,\operatorname{sech} v(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2) \\ &= 4\tanh v\,\operatorname{sech} v\,d\xi\,d\eta \\ &= 2M\,d\xi\,d\eta \end{aligned}$$

問題 2-1

$$ds^2 = d\xi^2 + 2(2\tanh^2 v - 1)\,d\xi\,d\eta + d\eta^2 = d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + d\eta^2,$$
$$I\!I = 4\tanh v\,\operatorname{sech} v\,d\xi\,d\eta = 2M\,d\xi\,d\eta$$

- $F = 2\tanh^2 v - 1$, $M = 2\tanh v\,\operatorname{sech} v$: $F^2+M^2=1$
- $F=\cos\theta$, $M=\sin\theta$ $(0<\theta<\pi)$ となる θ が存在する．

事実

- $\theta = 4\tan^{-1} e^{-v} = 4\tan^{-1}\exp\left(\delta\xi + \frac{1}{\delta}\eta\right)$.
- $\theta_{\xi\eta} = \sin\theta$.

問題 2-1

$$F = \cos\theta = 2\tanh^2 v - 1 = \frac{\sinh^2 v - 1}{\sinh^2 v + 1} = \frac{1-\operatorname{cosech}^2 v}{1+\operatorname{cosech}^2 v},$$
$$M = \sin\theta = 2\tanh v\,\operatorname{sech} v = \frac{2\sinh v}{\sinh^2 + 1} = \frac{2\operatorname{cosech} v}{1+\operatorname{cosech}^2}v,$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \operatorname{cosech} v = \frac{2}{e^v - e^{-v}} = \frac{2e^{-v}}{1-e^{-2v}}$$
$$\tan\frac{\theta}{4} = e^{-v} = \exp\left(\delta\xi + \frac{1}{\delta}\eta\right)$$

事実

- $\theta = 4\tan^{-1} e^{-v} = 4\tan^{-1}\exp\left(\delta\xi + \frac{1}{\delta}\eta\right)$.
- $\theta_{\xi\eta} = \sin\theta$.

問題 2-1 (漸近 Chebyshev 網)

事実

$\mathbb{R}^3$ の，Gauss 曲率一定 -1 の曲面には

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + dv^2, \quad I\!I = 2\sin\theta\,du\,dv$$

となる座標系 (u,v) （漸近 Chebyshev 網という）が存在する．ただし θ は $(0,\pi)$ に値をとる (u,v) の関数で

$$\theta_{uv} = \sin\theta$$

を満たすものである．

問題 2-1 (変換の見つけかた)

$d\sigma^2 := -a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2$ とおくと

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1-a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2, \\ &= du^2 + \tanh^2 v\,d\sigma^2, \\ I\!I &= \tanh v\,\operatorname{sech} v(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2) \\ &= \tanh v\,\operatorname{sech} v\,d\sigma^2 \end{aligned}$$

ここで

問題 2-2

問題

正則曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式が $ds^2 = e^{2\sigma}(du^2+dv^2)$ となっているとする．ただし σ は (u,v) の C^∞-級関数である．このとき，パラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ によって第一基本形式が $ds^2 = e^{2\varphi}(d\xi^2+d\eta^2)$ となるならば，$u=u(\xi,\eta)$，$v=v(\xi,\eta)$ はそれぞれ (ξ,η) の調和関数になることを示しなさい．

問題 2-2 (等温座標系)

定義

第一基本形式が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$$

の形となるような曲面のパラメータ (u, v) を等温座標系という．

事実 (テキスト §15)

正則曲面は各点の近傍で等温座標系をもつ．

問題 2-2

座標変換 $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ をとると

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \\ &= e^{2\sigma}\left((u_\xi\, d\xi + u_\eta\, d\eta)^2 + (v_\xi\, d\xi + v_\eta\, d\eta)^2\right) \\ &= e^{2\sigma}\left((u_\xi^2 + v_\xi^2)\, d\xi^2 + 2(u_\xi u_\eta + v_\xi v_\eta)\, d\xi\, d\eta + (u_\eta^2 + v_\eta^2)\, d\eta^2\right) \end{aligned}$$

$\therefore (\xi, \eta)$ が等温座標系 $\Leftrightarrow \begin{cases} u_\xi^2 + v_\xi^2 = u_\eta^2 + v_\eta^2 \\ u_\xi u_\eta + v_\xi v_\eta = 0. \end{cases}$

問題 2-2

補題

(u, v) が等温座標系であるとき (ξ, η) が等温座標系

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_\xi &= v_\eta \\ u_\eta &= -v_\xi \end{cases} \text{または} \begin{cases} u_\xi &= -v_\eta \\ u_\eta &= v_\xi \end{cases}$$

- 補題の条件が成り立つとき，u, v は ξ, η に関する調和関数

問題 2-2 (Cauchy-Riemann)

補題

(u, v) が等温座標系のとき (ξ, η) が等温座標系かつ $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_\xi &= v_\eta \\ u_\eta &= -v_\xi \end{cases} \qquad \text{(Cauchy-Riemann の方程式)}$$

事実

複素関数 $\xi + \sqrt{-1}\eta \mapsto u + \sqrt{-1}v$ が正則

($\Leftrightarrow$ 複素変数の関数として「微分可能」)

$\Leftrightarrow$ Cauchy-Riemann の方程式を満たす