幾何学概論第二 (MTH.B212)

2: パラメータ不変性 (補足)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 17 日 (2020/12/24)

問題 2-1

問題

領域 $\{(u, v)\,;\, v > 0\}$ **で定義された正則曲面** $p(u, v)$ **の第一基本形式** ds^2 **と第二基本形式** II **が**

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - a^2 \tanh^2 v)\, du^2 + 2ab \tanh^2 v\, du\, dv + a^2 \tanh^2 v\, dv^2, \\ II &= \tanh v \operatorname{sech} v(-a^2\, du^2 + 2ab\, du\, dv + a^2\, dv^2) \end{aligned}$$

で与えられるとする．ただし a, b **は** $a^2 + b^2 = 1$ **を満たす定数で** $a > 0$ **となるものとする．このとき，座標変換** $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ **で** $ds^2 = d\xi^2 + 2F\, d\xi\, d\eta + d\eta^2$, $II = 2M\, d\xi\, d\eta$ **となるものを求めなさい．**

- Dini **の擬球の** $a^2 + b^2 = 1$ **の場合．**
- $K = -1$**．**

問題 2-1 解答（天下り）

座標変換

$$u = -\xi + \eta, \qquad v = -\delta\xi - \frac{1}{\delta}\eta \qquad \left(\delta := \frac{a}{1+b}\right)$$

により

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (1 - a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2 \\
&= d\xi^2 + 2(2\tanh^2 v - 1)\,d\xi\,d\eta + d\eta^2 \\
&= d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + d\eta^2, \\
II &= \tanh v \operatorname{sech} v(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2) \\
&= 4\tanh v \operatorname{sech} v\,d\xi\,d\eta \\
&= 2M\,d\xi\,d\eta
\end{aligned}$$

問題 2-1

$$ds^2 = d\xi^2 + 2(2\tanh^2 v - 1)\, d\xi\, d\eta + d\eta^2 = d\xi^2 + 2F\, d\xi\, d\eta + d\eta^2,$$
$$I\!I = 4\tanh v \operatorname{sech} v\, d\xi\, d\eta = 2M\, d\xi\, d\eta$$

- $F = 2\tanh^2 v - 1,\ M = 2\tanh v \operatorname{sech} v$: $F^2 + M^2 = 1$
- $F = \cos\theta,\ M = \sin\theta\ (0 < \theta < \pi)$ **となる** θ **が存在する．**

事実

- $\theta = 4\tan^{-1} e^{-v} = 4\tan^{-1}\exp\left(\delta\xi + \dfrac{1}{\delta}\eta\right).$
- $\theta_{\xi\eta} = \sin\theta.$

問題 2-1

$$
\begin{aligned}
F &= \cos\theta = 2\tanh^2 v - 1 = \frac{\sinh^2 v - 1}{\sinh^2 v + 1} = \frac{1 - \operatorname{cosech}^2 v}{1 + \operatorname{cosech}^2 v}, \\
M &= \sin\theta = 2\tanh v \operatorname{sech} v = \frac{2\sinh v}{\sinh^2 + 1} = \frac{2\operatorname{cosech} v}{1 + \operatorname{cosech}^2} v, \\
\tan\frac{\theta}{2} &= \operatorname{cosech} v = \frac{2}{e^v - e^{-v}} = \frac{2e^{-v}}{1 - e^{-2v}} \\
\tan\frac{\theta}{4} &= e^{-v} = \exp\left(\delta\xi + \frac{1}{\delta}\eta\right)
\end{aligned}
$$

事実

- $\theta = 4\tan^{-1} e^{-v} = 4\tan^{-1}\exp\left(\delta\xi + \frac{1}{\delta}\eta\right)$.
- $\theta_{\xi\eta} = \sin\theta$.

問題 2-1 (漸近 Chebyshev 網)

事実

$\mathbb{R}^3$ の，Gauss 曲率一定 -1 の曲面には

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + dv^2, \quad I\!I = 2\sin\theta\,du\,dv$$

となる座標系 (u, v) （漸近 Chebyshev 網という）が存在する．ただし θ は $(0, \pi)$ に値をとる (u, v) の関数で

$$\theta_{uv} = \sin\theta$$

を満たすものである．

問題 2-1 (変換の見つけかた)

$d\sigma^2 := -a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2$ とおくと

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2, \\ &= du^2 + \tanh^2 v\,d\sigma^2, \\ II &= \tanh v\,\mathrm{sech}\,v(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2) \\ &= \tanh v\,\mathrm{sech}\,v\,d\sigma^2 \end{aligned}$$

ここで

問題 2-2

問題

正則曲面 $p(u, v)$ **の第一基本形式が** $ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$ **となっているとする．ただし** σ **は** (u, v) **の** C^∞**-級関数である．このとき，パラメータ変換** $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ **によって第一基本形式が** $ds^2 = e^{2\varphi}(d\xi^2 + d\eta^2)$ **となるならば，**$u = u(\xi, \eta)$**，**$v = v(\xi, \eta)$ **はそれぞれ** (ξ, η) **の調和関数になることを示しなさい．**

問題 2-2 (等温座標系)

定義

第一基本形式が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$$

の形となるような曲面のパラメータ (u, v) を等温座標系という．

事実 (テキスト §15)

正則曲面は各点の近傍で等温座標系をもつ．

問題 2-2

座標変換 $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ **をとると**

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \\
&= e^{2\sigma}\bigl((u_\xi\, d\xi + u_\eta\, d\eta)^2 + (v_\xi\, d\xi + v_\eta\, d\eta)^2\bigr) \\
&= e^{2\sigma}\bigl((u_\xi^2 + v_\xi^2)\, d\xi^2 + 2(u_\xi u_\eta + v_\xi v_\eta)\, d\xi\, d\eta + (u_\eta^2 + v_\eta^2)\, d\eta^2\bigr)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (ξ, η) **が等温座標系** $\Leftrightarrow \begin{cases} u_\xi^2 + v_\xi^2 = u_\eta^2 + v_\eta^2 \\ u_\xi u_\eta + v_\xi v_\eta = 0. \end{cases}$

問題 2-2

補題

(u, v) が等温座標系であるとき (ξ, η) が等温座標系

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_\xi & = v_\eta \\ u_\eta & = -v_\xi \end{cases} \text{または} \begin{cases} u_\xi & = -v_\eta \\ u_\eta & = v_\xi \end{cases}$$

- 補題の条件が成り立つとき，u, v は ξ, η に関する調和関数

問題 2-2 (Cauchy-Riemann)

補題

(u, v) **が等温座標系のとき** (ξ, η) **が等温座標系かつ** $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_\xi &= v_\eta \\ u_\eta &= -v_\xi \end{cases} \qquad \text{(Cauchy-Riemann の方程式)}$$

事実

複素関数 $\xi + \sqrt{-1}\eta \mapsto u + \sqrt{-1}v$ **が正則**

($\Leftrightarrow$ **複素変数の関数として「微分可能」**)

$\Leftrightarrow$ Cauchy-Riemann **の方程式を満たす**