幾何学概論第二 (MTH.B212)

3: Weingarten の公式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 17 日

目標

事実

第一基本形式を用いて，曲面上の曲線の長さ・曲線の成す角・領域の面積を求めることができる．

定理

- Weingarten 行列の固有値は実数．
- Weingarten 行列は対角化可能．
- Weingarten の公式：$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$．
- 全臍的曲面

内積と表現行列 (線形代数の復習)

V: n 次元線形空間 $(n < \infty)$
$\langle\ ,\ \rangle$: 内積
$B := \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$: V の基底

定義

内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の基底 B に関する表現行列とは $M_B := (\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j\rangle)_{i,j=1,\dots,m}$ で与えられる m 次対称行列 M_B のことである．

$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ を成分表示して

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^m v_j \boldsymbol{b}_j = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

とすると

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = (v_1, \dots, v_m) M_B \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

第一基本行列

正則曲面 $p(u,v)$ の点 (u_0, v_0) における接ベクトル空間

$$dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2) = \mathrm{Span}\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- 第一基本行列 $\widehat{I}$ は $\mathbb{R}^3$ の内積を制限して得られる $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)$ の内積の，基底 $\{p_u, p_v\}$ に関する表現行列．
- (u_0, v_0) における接ベクトル

$$\boldsymbol{a} := a_1 p_u + a_2 p_v, \qquad \boldsymbol{b} := b_1 p_u + b_2 p_v \quad (p_u = p_u(u_0,v_0), p_v = p_v(u_0,v_0))$$

の大きさ，内積は

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{E a_1^2 + 2F a_1 a_2 + G a_2^2},$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = E a_1 b_1 + F(a_1 b_2 + a_2 b_1) + G a_2 b_2.$$

ただし E, F, G は第一基本量の (u_0, v_0) における値．

弧長

命題 (命題 3.1)

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$:正則曲面；
$\gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$: U 上の曲線；
$\hat\gamma(t) := p \circ \gamma(t)$: 対応する曲面上の曲線 $\Rightarrow$

$$\hat\gamma \text{ の弧長} = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

ただし $E = E(u(t), v(t))$, $\dots$.

弧長

命題 (命題 3.1)

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$:正則曲面；
$\gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$: U 上の曲線；
$\hat\gamma(t) := p \circ \gamma(t)$: 対応する曲面上の曲線；
$s = s(t)$: $\hat\gamma$ の弧長パラメータ $\Rightarrow$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

面積要素

定義

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned} dA :&= \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{\det \widehat{I}}\,du\,dv \\ &= |p_u \times p_v|\,du\,dv = |\det(p_u, p_v, \nu)|\,du\,dv \end{aligned}$$

を面積要素という．ただし ν は p の単位法線ベクトル場．

$\Omega \subset U$：有界領域で $\overline{\Omega} \subset U$;

$$\overline{\Omega} \text{ の面積} := \iint_{\overline{\Omega}} dA$$

面積要素

定義

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned} dA :&= \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{\det \widehat{I}}\,du\,dv \\ &= |p_u \times p_v|\,du\,dv = |\det(p_u, p_v, \nu)|\,du\,dv \end{aligned}$$

を面積要素という．ただし ν は p の単位法線ベクトル場．

$\Omega \subset U$：有界領域で $\overline{\Omega} \subset U$;

$$\overline{\Omega} \text{ の面積} = \mathcal{A}(\overline{\Omega}) := \iint_{\overline{\Omega}} dA$$

面積要素

命題
面積 $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ はパラメータの取り方によらない．

面積要素

命題
正の数 t に対して $\mathbb{R}^3$ の閉領域

$$\{p(u,v)+\tau\nu(u,v)\,;\,(u,v)\in\overline{\Omega}, 0\leqq\tau\leqq t\}$$

の体積を V_t とすると，$\frac{d}{dt}V_t\big|_{t\to+0}=A(\Omega)$.

主曲率

命題 (命題 3.5)
正則曲面 $p(u,v)$ の各点 (u_0,v_0) における Weingarten 行列 $A:=A(u_0,v_0)$ の固有値は実数で，A は実行列により対角化可能．

主曲率

命題 (命題 3.5)
$H^2-K\geqq 0$.

- A の固有値 λ_1, λ_2 を主曲率とよぶ．
- 2 つの主曲率が一致する点を臍点（せいてん）とよぶ．
- 臍点 $\Leftrightarrow$ その点で $H^2-K=0$．

Weingarten の公式

$p\colon U\to\mathbb{R}^3$: 正則曲面；ν: 単位法線ベクトル場．

定理 (定理 3.7)

$$(\nu_u,\nu_v)=-(p_u,p_v)A \qquad (A=\widehat{I}^{-1}\widehat{II} \text{ は Weingarten 行列}).$$

全臍的曲面

定理 (定理 3.7)
全ての点が臍点である曲面（全臍的曲面）の像は球面または平面の一部．

問題 3-1

問題
$U=\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された曲面の第一基本形式が $ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$ となるとする．U 上の曲線 $u^2+\cosh^2 v=a^2$（$a>1$）に対応する曲面上の曲線を C_a，直線 $u=b$（$b\in\mathbb{R}$）に対応する曲面上の曲線を L_b とするとき，

1. C_a の長さを求めなさい．
2. C_a と L_b の交点 P における交角を求めなさい．
3. $\overline{\Omega}:=\{(u,v)\in U\,;\,a_1^2\leqq u^2+\cosh^2 v\leqq a_2^2, 0\leqq u\leqq b\}$ に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい．ただし a_1, a_2, b は $1<a_1<a_2$, $0<b<\sqrt{a_1^2-1}$ を満たす定数である．

問題 3-2

問題
正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとり，実数 t に対して $p_t(u,v):=p(u,v)+t\nu(u,v)$ とおく．

1. p_t が点 (u_0,v_0) に特異点をもつような t はどういう値か．
2. p の Gauss 曲率が正の定数 K であるとき，p_t が平均曲率一定となるような t の値を求めなさい．