幾何学概論第二 (MTH.B212)

3: Weingarten の公式

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 17 日

目標

事実

第一基本形式を用いて，曲面上の曲線の長さ・曲線の成す角・領域の面積を求めることができる．

定理

- Weingarten **行列の固有値は実数．**
- Weingarten **行列は対角化可能．**
- Weingarten **の公式：**$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$**．**
- **全臍的曲面**

内積と表現行列 (線形代数の復習)

V: n 次元線形空間 $(n < \infty)$
$\langle\ ,\ \rangle$: 内積
$B := \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$: V の基底

定義

内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の基底 B に関する表現行列とは
$M_B := (\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle)_{i,j=1,\dots,m}$ で与えられる m 次対称行列 M_B のことである．

$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ を成分表示して

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{m} v_j \boldsymbol{b}_j = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

とすると

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = (v_1, \dots, v_m) M_B \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

第一基本行列

正則曲面 $p(u,v)$ の点 (u_0,v_0) における接ベクトル空間

$$dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2) = \mathrm{Span}\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- **第一基本行列 $\widehat{I}$ は $\mathbb{R}^3$ の内積を制限して得られる $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)$ の内積の，基底 $\{p_u,p_v\}$ に関する表現行列．**
- **(u_0,v_0) における接ベクトル**

$$\boldsymbol{a} := a_1p_u + a_2p_v, \qquad \boldsymbol{b} := b_1p_u + b_2p_v$$
$$(p_u = p_u(u_0,v_0), p_v = p_v(u_0,v_0))$$

の大きさ，内積は

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{Ea_1^2 + 2Fa_1a_2 + Ga_2^2},$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = Ea_1b_1 + F(a_1b_2 + a_2b_1) + Ga_2b_2.$$

ただし E, F, G は第一基本量の (u_0,v_0) における値．

弧長

命題 (命題 3.1)

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$:**正則曲面；**
$\gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$: U **上の曲線；**
$\hat{\gamma}(t) := p \circ \gamma(t)$: **対応する曲面上の曲線** $\Rightarrow$

$$\hat{\gamma}\ \textbf{の弧長} = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

ただし $E = E(u(t), v(t)), \ldots.$

弧長

命題 (命題 3.1)

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$:**正則曲面；**
$\gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$: U **上の曲線；**
$\hat{\gamma}(t) := p \circ \gamma(t)$: **対応する曲面上の曲線；**
$s = s(t)$: $\hat{\gamma}$ **の弧長パラメータ** $\Rightarrow$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

面積要素

定義

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ **に対して**

$$
\begin{aligned}
dA := \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv &= \sqrt{\det \widehat{I}}\,du\,dv \\
&= |p_u \times p_v|\,du\,dv = |\det(p_u, p_v, \nu)|\,du\,dv
\end{aligned}
$$

を面積要素という．ただし ν **は** p **の単位法線ベクトル場．**

$\Omega \subset U$ **：有界領域で** $\overline{\Omega} \subset U$;

$$
\overline{\Omega}\ \textbf{の面積} := \iint_{\overline{\Omega}} dA
$$

面積要素

定義

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して

$$
\begin{aligned}
dA :&= \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \sqrt{\det \widehat{I}}\, du\, dv \\
&= |p_u \times p_v|\, du\, dv = |\det(p_u, p_v, \nu)|\, du\, dv
\end{aligned}
$$

を面積要素という．ただし ν は p の単位法線ベクトル場．

$\Omega \subset U$**：有界領域で** $\overline{\Omega} \subset U$;

$$
\overline{\Omega} \text{ の面積} = \mathcal{A}(\overline{\Omega}) := \iint_{\overline{\Omega}} dA
$$

面積要素

命題

面積 $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ はパラメータの取り方によらない．

面積要素

命題

正の数 t に対して $\mathbb{R}^3$ の閉領域

$$\{p(u,v) + \tau\nu(u,v)\,;\,(u,v) \in \overline{\Omega}, 0 \leqq \tau \leqq t\}$$

の体積を V_t とすると， $\frac{d}{dt}V_t\Big|_{t\to+0} = A(\Omega)$.

主曲率

命題 (命題 3.5)

正則曲面 $p(u,v)$ **の各点** (u_0,v_0) **における** Weingarten **行列** $A := A(u_0,v_0)$ **の固有値は実数で，**A **は実行列により対角化可能．**

主曲率

命題 (命題 3.5)

$H^2 - K \geqq 0.$

- A の固有値 λ_1, λ_2 を主曲率とよぶ．
- 2 つの主曲率が一致する点を臍点（せいてん）とよぶ．
- 臍点 $\Leftrightarrow$ その点で $H^2 - K = 0$．

Weingarten の公式

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$: **正則曲面；**$\nu$: **単位法線ベクトル場．**

定理 (定理 3.7)

$$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A \qquad (A = \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}\ \text{は Weingarten 行列}).$$

全臍的曲面

定理 (定理 3.7)

全ての点が臍点である曲面（全臍的曲面）の像は球面または平面の一部.

問題 3-1

問題

$U=\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された曲面の第一基本形式が $ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$ となるとする．U 上の曲線 $u^2+\cosh^2 v=a^2$（$a>1$）に対応する曲面上の曲線を C_a，直線 $u=b$（$b\in\mathbb{R}$）に対応する曲面上の曲線を L_b とするとき，

1. C_a の長さを求めなさい．
2. C_a と L_b の交点 P における交角を求めなさい．
3. $\overline{\Omega}:=\{(u,v)\in U\,;\,a_1^2\leqq u^2+\cosh^2 v\leqq a_2^2, 0\leqq u\leqq b\}$ に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい．ただし a_1, a_2, b は $1<a_1<a_2$, $0<b<\sqrt{a_1^2-1}$ を満たす定数である．

問題 3-2

問題

正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとり，実数 t に対して $p_t(u,v) := p(u,v) + t\nu(u,v)$ とおく．

1. **p_t が点 (u_0,v_0) に特異点をもつような t はどういう値か．**
2. **p の Gauss 曲率が正の定数 K であるとき，p_t が平均曲率一定となるような t の値を求めなさい．**