2020 年 12 月 17 日 (2020 年 12 月 24 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 3

■お知らせ

- 課題提出者は 26 名でした．

■前回までの訂正

- 講義資料 2, 3 ページ，注意 2.3 の 2 行目：$\det P$ の値 ⇒ $\det P$ の符号（$\det P = \pm 1$ なので同じことではありますが）
- 講義資料 2, 4 ページ 7 行目：$\mathrm{Span}\{\tilde{p}_\xi, p_\eta\}$ ⇒ $\mathrm{Span}\{\tilde{p}_\xi, \tilde{p}_\eta\}$
- 講義資料 2, 主張 2.9 の証明：${}^tJ^{-1}J$ ⇒ ${}^tJ^{-1}\,{}^tJ$
- 映写資料 2, 7 ページ，Dini の擬球の母線の式の第三成分：$a(v - \operatorname{sech} v)$ ⇒ $a(v - \tanh v)$
- 黒板 2，4 ページ：$L = \dots = \frac{x\dot{z}}{\sqrt{}}$ ⇒ $L = \dots = -\frac{x\dot{z}}{\sqrt{}}$
- 黒板 2，8 ページ，右下 tanh のグラフ：$y = \tanh v$ ⇒ $y = \tanh x$

■授業に関する御意見

- 等長変換で検索しようとしたところ，文字変換が盗職（原文ママ：盗聴？）・頭頂. . . で，1 文字ずつ書かないと調べられなかったです． **山田のコメント：** 山田は生活に支障をきたすので登録しています．
- ξ とうまく書けません．コツがあれば教えていただきたいです． **山田のコメント：** うまく書けているようです．
- 等温座標の名前の由来が気になります． **山田のコメント：** 山田も気になっています．
- Jacobian をジャコビアン，Jacobi 行列式をヤコビ行列式と呼ぶのには何か主義があるのですか？ **山田のコメント：** 人名なので，できるだけ原語にあわせて「ヤコビ」と読むのがよいが，“an” は英語の語尾なので全体を英語発音に合わせている．
- $p(u, v) = (v, \cos u, v \sin u, v)$ $(-2 \leqq v \leqq -1,\ 1 \leqq v \leqq 2,\ u \in \mathbb{R})$ の螺旋階段は見たことがない．
  山田のコメント： 階段はなめらかでない．
- 球面の座標変換の例で $\cos^2 v$ と $\operatorname{sech}^2 \eta$ が同じことに気づかずに時間溶けました．悲しいです．
  山田のコメント： そういう時間って大事です．
- 第一基本形式を ds^2 と習慣的にかくのに第二基本形式を dt^2 とかかずに $I\!I$ とかくのはなぜか気になった．
  山田のコメント： 質問 11 参照．
- 前回の課題 1-1 は何も考えずに計算していましたが，今回の講義中に格好良い名前がついていたりきれいな形をしていることが紹介されて感動しました．盛り上がって良かったです． **山田のコメント：** よかったです．

■質問と回答

質問 1： p_u と p_v が直交するようなパラメータはいつでもとって来れるのでしょうか（幾何学的には正則曲面ならとってこれそうでもあるし，第一基本行列が対称行列なのでうまいパラメータ変換がありそうだと思った）．

お答え： はい，問題 2-2 のようなパラメータ（等温座標系とよぶ，と講義でのべた）はいつでも存在します（テキスト §15, 定理 15.4）．直交するだけなら，テキスト 235 ページの補題 B-5.5 を用いれば，もう少し簡単に証明できます．

質問 2： φ が微分同相 (a diffeomorphism) であることの定義で，どうして全単射な φ と φ^{-1} が C^∞-級であることだけで同相が構成できるのですか？ φ, φ^{-1} が準同型であるとしていないのに “morphism” という言葉が入っているのが不思議に思いました．

お答え： この文脈での「準同型」はなんですか？「同相」なのはあたりまえ．実際，φ, φ^{-1} ともに連続になっている．morphism は “射”．何かの構造を保つ写像のことですが，ここでは「微分構造（詳細は説明しない）」を保っていると考えます．

質問 3： 曲線のパラメータ変換のときは曲線の向きを変えないものを考えないと符号が変わってしまうなど考えにくくなってしまう量があり，$\varphi' > 0$ として考えていましたが，二変数のパラメータ変換では直観的に曲線と同様に考えると $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} > 0$ のような条件が入りそうだと思っていましたが，その条件がなくても証明中の式を見る限り特に問題は起こっていないように見えます．この曲線のパラメータ変換と曲面のパラメータ変換での定義の仕方に差があるのはなぜでしょうか．また，曲線のパラメータ変換のときのような，正の変換（$\varphi' > 0$），負の変換（$\varphi' < 0$）（これは解析学概論での言い方だったかもしれません）のようなものは曲面のパラメータ変換でも考えることはあるのでしょうか．

お答え： $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} > 0$ となるパラメータ変換を正の変換，負になるものを負の変換といいます．講義資料の命題やその証明は変換の正負にかかわらないように慎重にステートメントを書いていますが，たとえば，$\nu := p_u \times p_v / |p_u \times p_v|$ と定める，という設定にしてしまうと，負の変換で ν が逆を向いてしまうので，第二基本量や平均曲率の符号がかわってしまいます．

質問 4： $\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta = p_u \times p_v (u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi)$ なので $\frac{\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta}{|\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta|}$ と $\nu \circ \varphi$ は $\det J_\varphi$ の付号（原文ママ：符号のことか）だけ違いますが，これは意味がありますか． **お答え：** はい．負の座標変換では $p_u \times p_v$ の向きが変わります．講義資料 2 で「$\tilde{\nu} = \nu \circ \varphi$ に関する第二基本量」といっているのは，そのためです．

質問 5： 曲線ではパラメータ変換 φ について $\dot{\varphi} > 0$ が必要でしたが曲面におけるパラメータ変換ではこのような条件を求めないのはなぜですか． **お答え：** 求めてもよいです．

質問 6： 「関数 $f(u,v)$ に対して $df := f_u\,du + f_v\,dv$ を f の全微分という」とありますが，この「df」の実態は何なのでしょうか．df は「du」と「dv」を使って定義されていますが，そもそも du や dv の正体は何なのでしょうか？多項式の「変数」のような単なる形式的な記号ということなのでしょうか． **お答え：**微分積分学で学んだ多変数関数の微分可能性の定義を思い出しましょう．そこに現れる「線形写像」が df の正体です．これは（2 変数なら）$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への線形写像ですから，$\mathbb{R}^2$ のベクトルを列ベクトルで表すなら，2 次の行ベクトル (f_u, f_v) となります．とくに $(u,v) \mapsto u$ の全微分は $(1,0)$，$(u,v) \mapsto v$ の全微分は $(0,1)$ なので $du = (1,0)$, $dv = (0,1)$．したがって $df = (f_u, f_v) = f_u\,du + f_v\,dv$.

質問 7： 第一基本形式の $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ は幾何学的にはどのような意味をもつのでしょうか．ある点での微小な変化についての関係らしいというのは分かるのですが，左辺の ds^2 は曲面のどんな量を表しているのか分かりません．

お答え： ds^2 は単なる記号．第一基本行列は，$\mathbb{R}^3$ の内積を接ベクトル空間 $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)$ に制限した内積の，基底 $\{p_u, p_v\}$ に関する表現行列．そのことを，座標系の情報も含めて書いたのが ds^2 の定義式．多様体論的には $\mathbb{R}^2$ の接空間の対称 2 次形式を局所座標を用いて表示したもの．

質問 8： 第一基本形式の ds^2 は微小長さの 2 乗に一致するのでしょうか． **お答え：**微小長さとは何でしょうか．

質問 9： 第一基本形式は平面の距離の一般化の計量（原文ママ：あまり意味がわからない）になっていると思いますが，第二基本形式は何の一般化になっているのでしょうか．

お答え： 平面の何か，とすると一般化とは言いにくいですね．平面の第二基本形式は恒等的に零ですから．

質問 10： 第二基本形式は II と書くのに第一基本形式は I でなく ds^2 と書くのは何か意味があるのですか．

お答え： ds^2 と書くのは古来の習慣．I と書かないのは単位行列の記号をどうすべきか迷ったため．

質問 11： 第二基本形式が第二基本行列と似た記号を使われているのに第一基本形式は ds^2 で表されているのはなぜかと思い，教科書をみたら $\Delta s = p(u,v)$ と $p(u+\Delta u, v+\Delta v)$ の距離と書いてあり少し納得しましたが，第二基本形式の幾何学的な意味はないのでしょうか． **お答え：**ある．

質問 12： 計量が正定値でないと困ることがありますか？ **お答え：**困りません．正定値でない計量での幾何もできます．ただ，正定値で成り立ったことが成り立たないこともあります（が困りません）．

質問 13： 曲面は E, F, G, L, M, N で定まるらしいが，その曲面を座標変換すると，像は同じなのに E, F, G, L, M, N は変わりますよね．これは座標が異なれば曲面の形は同じだけど違う曲面として扱うということですか．

お答え： E, F, G, L, M, N から曲面を構成するには「パラメータを指定して」作ります．その意味では，パラメータを替えると異なる曲面ができますが，図形として同じなので，より正確には「曲面は ds^2 と II から決まる」と言った方が良いかもしれません．

質問 14： 第一，第二基本形式は座標変換によらない不変量だと認識したのですが，他にも重要な，変換によらない不変量は定義されていますか． **お答え：**もう知っている，平均曲率や Gauss 曲率．「座標変換によらない不変量だと認識した」のと「座標変換によらない不変量だということを理解した」の違いはなんですか？ご質問の文脈では「座標変換によらない不変量ですが」で十分だと思いますが，わざと「認識した」という語を付け加えた理由は何ですか．

質問 15： 3 ページ最後の行 $\bigl(p(\xi,\eta) =\bigr)\tilde{p}(\xi,\eta)$ とありますが，括弧は $(p\circ\varphi)(\xi,\eta)$ の間違いでしょうか．間違いでなければ，読み方がわからないのでそれを質問とします． **お答え：**説明しそびれました．「$\tilde{p}(\xi,\eta)$ は $p(u,v)$ と同じ曲面を表しているので，誤解の恐れがないときはそれを強調して $p(\xi,\eta)$ と書くこともある」ということです．

質問 16： $p(u,v) = (x(v)s(u), x(v)t(u), z(v))$ と表されているとき，$(s(u),t(u)) = (a\cos u, b\sin u)$ なら $\gamma(v) = (x(v), 0, z(v))$ を z 軸周りを隋円（原文ママ：楕円のことか？）の形で，$((s(u),t(u)) = (\cos^3 u, \sin^3 u)$ なら $\gamma(v) = (x(v), 0, z(v))$ を z 軸周りをアステロイドのような形で回転したような曲線ですか． **お答え：**そうですね．z 軸に垂直な平面での切り口はどんな形？

質問 17： 問題 2-2 で扱った等温座標系の名称の由来は何でしょうか．P77 での説明を読む限りは「uv 平面上... 角度が一致」とのことで，“等温” の要素が数式のどの部分に反映されているのか疑問に思いました．ご回答いただけますと幸いです．

質問 18： 「等温座標系」という名はどこから来たのえしょうか．熱力学あたりで重要だったりするのでしょうか．

お答え： 実はよくわからないのですが，平面（鉄板など）を熱が伝わっていく現象を考えるとき，平衡状態の温度分布は調和関数になることかもしれませんし，等温線と熱流が直交することから来ているのかもしれません．ご質問の角度が一致する，という観点から**等角座標系**, **共形座標系**とよぶこともあります．なお，熱力学で重要とは思えません．

質問 19： 問題 2-2 について，「等温座標」「調和関数」という言葉から熱拡散方程式を連想したのですが，これらが関連する話題はありますか． **お答え：**少しある．テキスト §15.

質問 20： 球面の例では，$p(u,v)$ は球面のすべての点に写っていません．$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ の球面が同相でないということは（p が正則であるかぎり）すべての点に写すことができないということでしょうか． **お答え：**はい，そうです．

質問 21： 講義資料 3 頁，補題 2.4 のステートメントの後半「W の連結性」は「$\det J_\phi$ が W 上連続」でしょうか． **お答え：**いいえ．$\det J_\varphi$ の連続性は使っていますが，これは J_φ が C^∞-級なので当たり前．それだけでは $\det J_\varphi$ の符号が一定とは言えない．

質問 22： 曲面のパラメータ変換のところで $\mathrm{Span}\{\tilde{p}_\xi, \tilde{p}_\eta\} = \mathrm{Span}\{p_u, p_v\}$ とあったのですが，span とは何ですか．

お答え： $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が生成するベクトル空間（ここでは $\mathbb{R}^3$ の部分空間）.

質問 23： 黒板 3, 11 頁，$H^2 - K = \dots$（中略）$= \frac{(\text{分子})}{4(EG-F^2)}$，(分子) $= \dots$（中略）．$H^2 - K \geqq 0$ を示したいが，ここから示せるのでしょうか？ **お答え：**今回やります（といいましたよね）．なお，右辺の分母は $(EG-F^2)^2$ となるはずです．

質問 24： 曲面の座標変換では第一，第二基本形式は変わらないことは示されましたが，座標変換でないが基本形式が変わらないことはあり得ますか？ **お答え：**「変わらないこと」の「こと」が動く範囲はなんでしょうか．ご質問の文では座標変換でなければ森羅万象のうちなんでもよい（たとえば地球温暖化）ように読めますが．

質問 25： 全微分の記号が普通の数のように扱える理由はなんでしょうか？ **お答え：**ご質問の意味がわかりません．全微分の記号とは “d” のこと？「普通の数のように扱える」とは？ $dy/dx = y/x$ のように約分できるということ？であれば「扱えません」．

3 Weingarten の公式

■計量　正則曲面 $p(u,v)$ の (u_0,v_0) における接ベクトル空間 $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)=\operatorname{Span}\{p_u(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\}$ に $\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積を制限して得られる内積の，基底 $\{p_u,p_v\}$ に関する表現行列は第一基本行列 $\widehat{I}$ である．実際，$\boldsymbol{a}=a_1p_u+a_2p_v$, $\boldsymbol{b}=b_1p_u+b_2p_v$ と書くと，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}={}^t\left((p_u,p_v)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\right)(p_u,p_v)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=(a_1,a_2)\begin{pmatrix}{}^tp_u\\{}^tp_v\end{pmatrix}(p_u,p_v)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=(a_1,a_2)\,\widehat{I}\,\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}.$$

命題 3.1. 正則曲面 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ に対して，U 上の曲線 $\gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ に対して，曲面上の曲線 $\hat\gamma(t):=p\circ\gamma(t)$ の長さは，第一基本量 E, F, G を用いて次のように表される：

$$\int_a^b\sqrt{E(u(t),v(t))\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F(u(t),v(t))\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G(u(t),v(t))\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

とくに $\hat\gamma$ の弧長パラメータ $s=s(t)$ は $\frac{ds}{dt}=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$ を満たす．

定義 3.2. 正則曲面 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ において，有界領域 Ω で閉包 $\overline{\Omega}$ が U に含まれるものをとる．このとき，$\overline{\Omega}$ の面積を $\mathcal{A}(\overline{\Omega}):=\iint_\Omega dA$ で定める．ここで，U の座標 (u,v) に関する第一基本量 E, F, G を用いて

$$dA:=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\sqrt{\det\widehat{I}}\,du\,dv=|p_u\times p_v|\,du\,dv=|\det(p_u,p_v,\nu)|\,du\,dv$$

で定まる積分要素を**面積要素** the area element という．ただし ν は p の単位法線ベクトル場．

命題 3.3. 面積 $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ はパラメータのとり方によらない．

証明： 座標変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で $\overline{\Omega}$ が $\xi\eta$-平面上の閉領域 $\overline{\Omega}'$ に対応しているとする．(u,v) と (ξ,η) に関する第一基本行列 $\widehat{I}$ と $\widetilde{\widehat{I}}$ は座標変換の Jacobi 行列 J を用いて $\widetilde{\widehat{I}}={}^tJ\,\widehat{I}\,J$ を満たすので，$\sqrt{\det\widetilde{\widehat{I}}}=|\det J|\sqrt{\det\widehat{I}}$. したがって重積分の変数変換の公式から結論が得られる．

注意 3.4. 正の数 t に対して $\mathbb{R}^3$ の閉領域 $\{p(u,v)+\tau\nu(u,v)\,;\,(u,v)\in\overline{\Omega},0\leqq\tau\leqq t\}$ の体積を V_t とすると，$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}V_t=\mathcal{A}(\overline{\Omega})$．これは，変数変換 $(u,v,\tau)\mapsto(x,y,z)=p(u,v)+\tau\nu(u,v)$ の Jacobi 行列式は $\det(p_u,p_v,\nu)+O(t)$ と書けることから 3 重積分の変数変換の公式を用いて示すことができる．

■第二基本形式の意味

命題 3.5. 正則曲面 $p(u,v)$ の各点 (u_0,v_0) における Weingarten 行列 $A:=A(u_0,v_0)$ の固有値は実数で，A は実行列により対角化可能．とくに $H^2-K\geqq 0$.

証明： Weingarten 行列 A は $\mathbb{R}^3$ の等長変換で不変なので，点 (u_0,v_0) で $p(u_0,v_0)=0$，接ベクトル空間が xy-平面の向きを向いているものをとしてよい．このとき，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ なので曲面は $z=f(x,y)$ とグラフ表示される．このとき，接ベクトル空間の条件から $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ なので，原点で $\widehat{I}=I$ (単位行列)，また単位法線ベクトルが $(0,0,1)$ ととれるので，$\widehat{II}=\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{pmatrix}$．したがって原点において，$A=\widehat{II}$ は対称行列．すなわち $J^{-1}AJ$ が実対称行列となる J が存在する．一般に実対称行列の固有値は実数で，直交行列により対角化可能なので，A の固有値は実数で，実行列により対角化可能．2 つの固有値を λ_1, λ_2 とおくと，$H^2-K=\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2)^2\geqq 0$.

2020 年 12 月 17 日 (2020 年 12 月 24 日訂正)

定義 3.6. Weingarten 行列の 2 つの固有値を**主曲率** the principal curvature，2 つの主曲率が一致する点を曲面の**臍点**（せいてん） an umbilic point という.

■Weingarten の公式 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場を $\nu(u,v)$ とするとき，各点 $(u,v) \in U$ において $\{p_u(u,v), p_v(u,v), \nu(u,v)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与える．これを *Gauss* **枠** the Gaussian frame と呼ぶことがある．これらのベクトルを列ベクトルとみなすと，3×3-正則行列に値をもつ関数 $\mathcal{F}(u,v) = \bigl(p_u(u,v), p_v(u,v), \nu(u,v)\bigr)$ が得られる．この行列値関数も Gauss 枠と呼ぶ.

定理 3.7 (Weingarten の公式)**.** 正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル場を $\nu(u,v)$ とするとき，

$$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A \qquad (A = \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{II} \text{ は Weingarten 行列}).$$

証明： Gauss 枠を用いて ν_u, ν_v を p_u, p_v, ν の線形結合で表すことができる．ここで $\nu_u\cdot\nu = \frac{1}{2}(\nu\cdot\nu)_u = 0$, $\nu_v\cdot\nu = 0$ から，ν_u, ν_v は ν に直交する，すなわち接ベクトル空間 $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$ の元である．したがってこれらは p_u, p_v の線形結合で表される：$(\nu_u,\nu_v) = (p_u,p_v)B$．ただし $B = B(u,v)$ は行列値関数である．このとき $-\widehat{II} = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix}(\nu_u,\nu_v) = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix}(p_u,p_v)B = \widehat{I}B$. したがって $B = -A$.

すべての点が臍点であるような曲面を**全臍的曲面** a totally umbilic surface という.

定理 3.8. 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が全臍的ならば $p(U)$ は球面か平面の一部である．とくに $H = K = 0$ となる曲面の像は平面の一部.

証明： 主曲率（A の唯一の固有値）を λ とおくと，A が実行列で対角化可能であることから $A = \lambda I$ (I は単位行列)．したがって Weingarten の公式から $\nu_u = -\lambda p_u$, $\nu_v = -\lambda p_v$．これらをそれぞれ v, u で微分して，偏微分の順序交換を行うと $\nu_{uv} = -\lambda_v p_u - \lambda p_{uv}$, $\nu_{vu} = -\lambda_u p_v - \lambda p_{vu}$, したがって $\lambda_v p_u + \lambda_u p_v = \mathbf{0}$. とくに p_u, p_v が一次独立となることから $\lambda_u = \lambda_v = 0$．このことと領域 U の連結性から λ は定数．すると $(\lambda p + \nu)_u = (\lambda p_\nu)_v = \mathbf{0}$ なので $\lambda p + \nu =: \boldsymbol{a}$ は定ベクトル．(1) $\lambda \neq 0$ のとき $|p - \boldsymbol{a}| = 1/|\lambda|$．したがって $p(u,v)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$ となる点 A を中心とする半径 $1/|\lambda|$ の球面上にある．(2) $\lambda = 0$ のとき，ν は一定．このときは $\boldsymbol{a} = p(u_0,v_0)$ とおいて $\bigl((p-\boldsymbol{a})\cdot\nu\bigr)_u = \bigl((p-\boldsymbol{a})\cdot\nu\bigr)_v = 0$．したがって $\bigl(p(u,v) - \boldsymbol{a}\bigr)\cdot\nu = \mathbf{0}$．すなわち $p(u,v)$ は点 A（$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$）を通り ν に垂直な平面上にある.

問題

3-1 $U = \{(u,v)\,;\, v > 0\}$ で定義された曲面の第一基本形式が $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\,du^2 + \tanh^2 v\,dv^2$ となるとする．U 上の曲線 $u^2 + \cosh^2 v = a^2$（$a > 1$）に対応する曲面上の曲線を C_a，直線 $u = b$（$b \in \mathbb{R}$）に対応する曲面上の曲線を L_b とするとき，

(1) C_a の長さを求めなさい.

(2) C_a と L_b の交点 P における交角を求めなさい.

(3) $\overline{\Omega} := \{(u,v) \in U\,;\, a_1^2 \leqq u^2 + \cosh^2 v \leqq a_2^2, 0 \leqq u \leqq b\}$ に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい．ただし a_1, a_2, b は $1 < a_1 < a_2$, $0 < b < \sqrt{a_1^2 - 1}$ を満たす定数である.

3-2 正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとり，実数 t に対して $p_t(u,v) := p(u,v) + t\nu(u,v)$ とおく.

(1) p_t が点 (u_0,v_0) に特異点をもつような t はどういう値か.

(2) p の Gauss 曲率が正の定数 K であるとき，p_t が平均曲率一定となるような t の値を求めなさい.