幾何学概論第二 (MTH.B212)

3: お知らせ

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 17 日

お知らせ

- 今回は 26 名の方から課題の提出がありました.

		授業内容
12 月 03 日	1	~~Gauss 曲率・平均曲率 (第一基本量，第二基本量)~~
12 月 10 日	2	~~パラメータ不変性（第一基本形式，第二基本形式）~~
12 月 17 日	3	Weingarten の公式 (主曲率)
12 月 24 日	4	Gauss の公式 (Christoffel 記号)
12 月 31 日	休	
01 月 07 日	5	曲面論の基本定理 (驚異の定理) 定期試験予告
01 月 14 日	—	月曜日の授業
01 月 21 日	6	測地線 (Gauss-Bonnet の定理)
01 月 28 日	試	定期試験
02 月 04 日	—	定期試験期間（試験は行わない）

授業の感想など

ε ξ ξ ξ

- ξ とうまく書けません．コツがあれば教えていただきたいです． 山田のコメント： うまく書けているようです．
- Jacobian をジャコビアン，Jacobi 行列式をヤコビ行列式と呼ぶのには何か主義があるのですか？ 山田のコメント： 人名なので原語にあわせて「ヤコビ」と読む．“an” は英語の語尾なので全体を英語発音に合わせている．
- 球面の座標変換の例で $\cos^2 v$ と $\operatorname{sech}^2 \eta$ が同じことに気づかずに時間溶けました．悲しいです．
  山田のコメント： そういう時間って大事です．
- 前回の課題 1-1 は何も考えずに計算していましたが，今回の講義中に格好良い名前がついていたりきれいな形をしていることが紹介されて感動しました．盛り上がって良かったです．
  山田のコメント： よかったです．

Hermite Hermitian matrix

質問と回答

$\frac{si\cancel{n}x}{\cancel{n}} = 6$　　$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$

Q

曲面の座標変換では第一，第二基本形式は変わらないことは示されましたが，座標変換でないが基本形式が変わらないことはあり得ますか？

$\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}$

A

「変わらないこと」の「こと」が動く範囲はなんでしょうか．ご質問の文では座標変換でなければ森羅万象のうちなんでもよい（たとえば地球温暖化）ように読めますが．

Q

全微分の記号が普通の数のように扱える理由はなんでしょうか？

A

ご質問の意味がわかりません．全微分の記号とは “d” のこと？「普通の数のように扱える」とは？ $dy/dx = y/x$ のように約分できるということ？であれば「扱えません」．

質問と回答

㋱ $p(\xi, \eta)$ $\tilde{p}(\xi, \eta) = p(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$

Q

3 ページ最後の行 $\bigl(p(\xi, \eta) =\bigr) \tilde{p}(\xi, \eta)$ とありますが，括弧は $(p \circ \varphi)(\xi, \eta)$ の間違いでしょうか．間違いでなければ，読み方がわからないのでそれを質問とします．

A

説明しそびれました．「$\tilde{p}(\xi, \eta)$ は $p(u, v)$ と同じ曲面を表しているので，誤解の恐れがないときはそれを強調して $p(\xi, \eta)$ と書くこともある」ということです．

$$\boxed{\bigl(p(\xi, \eta) =\bigr) \tilde{p}(\xi, \eta) = p\bigl(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)\bigr).}$$

質問と回答

isothermal

Q

- 問題 2-2 で扱った等温座標系の名称の由来は何でしょうか．P77 での説明を読む限りは「uv 平面上. . . 角度が一致」とのことで，“等温” の要素が数式のどの部分に反映されているのか疑問に思いました．ご回答いただけますと幸いです．
- 「等温座標系」という名はどこから来たのえしょうか．熱力学あたりで重要だったりするのでしょうか．

A

実はよくわからない．鉄板などを熱が伝わっていく現象を考えるとき，平衡状態の温度分布は調和関数になることか？
等温線と熱流が直交することから来ている？
角度が一致する，という観点から等角座標系，共形座標系とよぶ．

conformal

等温座標系

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$$
$$= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

経度

$$p(u, v) = \bigl(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v\bigr) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\right)$$

いど

$$\tilde{p}(\xi, \eta) = \bigl(\cos\xi \operatorname{sech}\eta, \sin\xi \operatorname{sech}\eta, \tanh\eta\bigr) \qquad (-\infty < \eta < \infty)$$

$$(u, v) = \bigl(\xi, \sin^{-1}\tanh\eta\bigr)$$

$$ds^2 = \cos^2 v\, du^2 + dv^2 = \operatorname{sech}^2\eta(d\xi^2 + d\eta^2)$$

$E = G$

$F = 0$

等温座標系

$$ds^2 = \cos^2 v\, du^2 + dv^2 = \operatorname{sech}^2 \eta (d\xi^2 + d\eta^2)$$

地球上の円

(u, v)

$\uparrow v$

$\uparrow \eta$

$\to u$

$\to \xi$

$v = \sin^{-1} \tanh \eta$

p

$\tilde{p}$

Mercator

質問と回答

Q

「関数 $f(u,v)$ に対して $df := f_u\,du + f_v\,dv$ を f の全微分という」とありますが，この「df」の実態は何なのでしょうか．df は「du」と「dv」を使って定義されていますが，そもそも du や dv の正体は何なのでしょうか？多項式の「変数」のような単なる形式的な記号ということなのでしょうか．

A

微分積分学で学んだ多変数関数の微分可能性の定義を思い出しましょう．そこに現れる「線形写像」が df の正体です．

全微分

め

定義

$\mathbb{R}^n$ の領域で定義された関数 f が $\boldsymbol{a}$ で微分可能であるとは

2 列

$(df)_a$

$h = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = L\boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|) \quad (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0})$$

$\in \mathbb{R}$

が成り立つような線形写像 L（$= (df)_{\boldsymbol{a}}$）が存在すること．

at a

L

$$(\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

df

$$L = (\alpha, \beta) = (f_u, f_v)$$

$$\varphi : (u, v) \longmapsto u \qquad d\varphi = (1, 0) = du$$

$$\longmapsto v \qquad (0, 1) = dv$$

$$L = (df)_a = f_u(1, 0) + f_v(0, 1)$$

$$= f_u\,du + f_v\,dv$$

質問と回答

Q

- 第一基本形式の $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ は幾何学的，にはどのような意味をもつのでしょうか．ある点での微小な変化についての関係らしいというのは分かるのですが，左辺の ds^2 は曲面のどんな量を表しているのか分かりません．
- 第一基本形式の ds^2 は微小長さの 2 乗に一致するのでしょうか．

A

- ds^2 は単なる記号．第一基本行列は，$\mathbb{R}^3$ の内積を接ベクトル空間 $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)$ に制限した内積の，基底 $\{p_u, p_v\}$ に関する表現行列．そのことを，座標系の情報も含めて書いたのが ds^2 の定義式．多様体論的には $\mathbb{R}^2$ の接空間の対称 2 次形式を局所座標を用いて表示したもの．
- 微小長さとは何でしょうか．

質問と回答

領域　連結．開．

Q

曲線のパラメータ変換のときは曲線の向きを変えないものを考えないと符号が変わってしまうなど考えにくくなってしまう量があり，$\varphi' > 0$ として考えていましたが，二変数のパラメータ変換では直観的に曲線と同様に考えると $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} > 0$ のような条件が入りそうだと思っていましたが，その条件がなくても証明中の式を見る限り特に問題は起こっていないように見えます．この曲線のパラメータ変換と曲面のパラメータ変換での定義の仕方に差があるのはなぜでしょうか．また，曲線のパラメータ変換のときのような，正の変換（$\varphi' > 0$），負の変換（$\varphi' < 0$）（これは解析学概論での言い方だったかもしれません）のようなものは曲面のパラメータ変換でも考えることはあるのでしょうか．

質問と回答

A

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} > 0$ となるパラメータ変換を正の変換，負になるものを負の変換といいます．講義資料の命題やその証明は変換の正負にかかわらないように慎重にステートメントを書いていますが，たとえば，$\nu := (p_u \times p_v)/|p_u \times p_v|$ と定める，という設定にしてしまうと，負の変換で ν が逆を向いてしまうので，第二基本量や平均曲率の符号がかわってしまいます．

空白ページ

講義

この後，短い休憩をとり，2 つの「講義」を行います．
質問などをチャットで行なう場合は，全員宛てにしてください

2 パラメータ不変性 (補足)

3 Weingarten の公式