幾何学概論第二 (MTH.B212)

2: パラメータ不変性 (補足)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 17 日

問題 2-1

問題

領域 $\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された正則曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 II が

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (1-a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2,\\
II &= \tanh v\,\mathrm{sech}\,v(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2)
\end{aligned}
$$

で与えられるとする．ただし a, b は $a^2+b^2=1$ を満たす定数で $a>0$ となるものとする．このとき，座標変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で $ds^2 = d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + d\eta^2$, $II = 2M\,d\xi\,d\eta$ となるものを求めなさい．E G

E=G=1

L=N=0

- Dini の擬球の $a^2+b^2=1$ の場合． 1-1
- $K=-1$.

問題 2-1 解答（天下り）

座標変換

$$u = -\xi + \eta, \qquad v = -\delta\xi - \frac{1}{\delta}\eta \qquad \left(\delta := \frac{a}{1+b}\right)$$

により　$du = -d\xi + d\eta$　$du^2 = (-d\xi + d\eta)^2$
$= d\xi^2 - 2d\xi d\eta + d\eta^2$

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2 \\ &= d\xi^2 + 2(2\tanh^2 v - 1)\,d\xi\,d\eta + d\eta^2 \\ &= d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + d\eta^2, \\ II &= \tanh v\,\mathrm{sech}\,v(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2) \\ &= 4\tanh v\,\mathrm{sech}\,v\,d\xi\,d\eta \\ &= 2M\,d\xi\,d\eta \end{aligned}$$

問題 2-1

$K = -1 = \frac{EG - F^2}{LN - M^2} = \frac{1 - F^2}{-M^2}$

$$ds^2 = d\xi^2 + 2(2\tanh^2 v - 1)\,d\xi\,d\eta + d\eta^2 = d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + d\eta^2,$$

$$II = 4\tanh v \operatorname{sech} v\,d\xi\,d\eta = 2M\,d\xi\,d\eta$$

$F^2 + M^2 = 4\tanh^4 v - 4\tanh^2 v + 1$

- $F = 2\tanh^2 v - 1$, $M = 2\tanh v \operatorname{sech} v$: $F^2 + M^2 = 1$ $+4\tanh^2 v$
- $F = \cos\theta$, $M = \sin\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ となる θ が存在する. $\operatorname{sech}^2 v$ $=$ $1 - \tanh^2 v$

事実

- $\theta = 4\tan^{-1} e^{v}$ $-v$ $= 4\tan^{-1}\exp\left(\delta\xi + \frac{1}{\delta}\eta\right)$.
- $\theta_{\xi\eta} = \sin\theta$. Sine-Gordon equation

問題 2-1

$$F = \cos\theta = 2\tanh^2 v - 1 = \frac{\sinh^2 v - 1}{\sinh^2 v + 1} = \frac{1 - \mathrm{cosech}^2\, v}{1 + \mathrm{cosech}^2\, v},$$

$$M = \sin\theta = 2\tanh v\, \mathrm{sech}\, v = \frac{2\sinh v}{\sinh^2 + 1} = \frac{2\,\mathrm{cosech}\, v}{1 + \mathrm{cosech}^2} v,$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \mathrm{cosech}\, v = \frac{2}{e^v - e^{-v}} = \frac{2e^{-v}}{1 - e^{-2v}}$$

$$\tan\frac{\theta}{4} = e^{-v} = \exp\left(\delta\xi + \frac{1}{\delta}\eta\right)$$

事実

$-v$

- $\theta = 4\tan^{-1} e^{v} = 4\tan^{-1}\exp\left(\delta\xi + \frac{1}{\delta}\eta\right).$
- $\theta_{\xi\eta} = \sin\theta.$

1-soliton

Kink

問題 2-1 (漸近 Chebyshev 網)

事実

$\mathbb{R}^3$ の，Gauss 曲率一定 -1 の曲面には

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2, \quad II = 2\sin\theta\, du\, dv$$

となる座標系 (u, v) （漸近 Chebyshev 網という）が存在する．ただし θ は $(0, \pi)$ に値をとる (u, v) の関数で

$$\theta_{uv} = \sin\theta$$

を満たすものである．

問題 2-1 (変換の見つけかた)

$d\sigma^2 := -a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2$ とおくと

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (1 - a^2\tanh^2 v)\,du^2 + 2ab\tanh^2 v\,du\,dv + a^2\tanh^2 v\,dv^2,\\
&= du^2 + \cancel{a^2}\tanh^2 v\,d\sigma^2,\\
II &= \tanh v\,\mathrm{sech}\, v\underbrace{(-a^2\,du^2 + 2ab\,du\,dv + a^2\,dv^2)}_{= d\sigma^2}\\
&= \tanh v\,\mathrm{sech}\, v\,d\sigma^2
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
d\sigma^2 &= dv^2 - (a\,du - b\,dv)^2 \qquad (a^2+b^2=1)\\
&= (dv + a\,du - b\,dv)(dv - a\,du + b\,dv)\\
&= \underline{(a\,du + (1-b)\,dv)}\,\underline{(-a\,du + (1+b)\,dv)}\\
&= * \; d\xi\,d\eta
\end{aligned}
$$

黒板

$$d\xi = \lambda(a\,du + (1-b)\,dv)$$
$$d\eta = \mu(-a\,du + (1+b)\,dv)$$

λ, μ: const

$$\xi = \lambda(au + (1-b)v)$$
$$\eta = \mu(\quad)$$

$d\sigma^2 = \lambda\mu\, d\xi\, d\eta$

$$u = \frac{1}{2a}\left((1+b)\lambda\xi - (1-b)\mu\eta\right)$$
$$v = \frac{1}{2}(\lambda\xi + \mu\eta)$$

$\lambda = \pm\frac{2a}{1+b}$

$\mu = \pm\frac{2a}{1-b}$

$=1$ $=1$

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{th}^2 v \cdot d\sigma^2 = * \, d\xi^2 + * \, d\eta^2$$

問題 2-2

問題

等温座標

正則曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式が $\boxed{ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)}$ となっているとする．ただし σ は (u,v) の C^∞-級関数である．このとき，パラメータ変換 $(\xi,\eta) \mapsto (u,v)$ によって第一基本形式が $ds^2 = e^{2\varphi}(d\xi^2 + d\eta^2)$ となるならば，$u = u(\xi,\eta)$，$v = v(\xi,\eta)$ はそれぞれ (ξ,η) の調和関数になることを示しなさい．

$$\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

問題 2-2 (等温座標系)

定義

第一基本形式が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$$

の形となるような曲面のパラメータ (u, v) を等温座標系という.

事実 (テキスト §15)

正則曲面は各点の近傍で等温座標系をもつ.

問題 2-2

座標変換 $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ をとると

$du = u_\xi d\xi + u_\eta d\eta$

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \\
&= e^{2\sigma}\left((u_\xi\, d\xi + u_\eta\, d\eta)^2 + (v_\xi\, d\xi + v_\eta\, d\eta)^2\right) \\
&= e^{2\sigma}\left((u_\xi^2 + v_\xi^2)\, d\xi^2 + \cancel{2(u_\xi u_\eta + v_\xi v_\eta)\, d\xi\, d\eta} + (u_\eta^2 + v_\eta^2)\, d\eta^2\right).
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (ξ, η) が等温座標系 $\Leftrightarrow \begin{cases} u_\xi^2 + v_\xi^2 = u_\eta^2 + v_\eta^2 \\ u_\xi u_\eta + v_\xi v_\eta = 0. \end{cases}$

問題 2-2

$u_{\xi\xi} = v_{\eta\xi}$

$u_{\eta\eta} = -v_{\xi\eta}$

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$

補題

(u, v) が等温座標系であるとき (ξ, η) が等温座標系

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} u_\xi &= v_\eta \\ u_\eta &= -v_\xi \end{cases}} \text{ または } \begin{cases} u_\xi &= -v_\eta \\ u_\eta &= v_\xi \end{cases}$$

- 補題の条件が成り立つとき，u, v は ξ, η に関する調和関数

$u_\xi^2 + v_\xi^2 = u_\eta^2 + v_\eta^2$ ①　　$u_\xi u_\eta + v_\xi v_\eta = 0$ ②

② $\Rightarrow$ $(u_\xi, v_\xi) \perp (u_\eta, v_\eta)$, $\neq 0$, $\neq 0$　　$\begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\xi \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} v_\eta \\ -u_\eta \end{pmatrix}$

① $\Rightarrow$ $k^2 = 1$　　$k = \pm 1$

問題 2-2 (Cauchy-Riemann)

補題

(u, v) が等温座標系のとき (ξ, η) が等温座標系かつ $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} > 0$、

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_\xi &= v_\eta \\ u_\eta &= -v_\xi \end{cases} \qquad \text{(Cauchy-Riemann の方程式)}$$

事実

複素関数 $\xi + \sqrt{-1}\eta \mapsto u + \sqrt{-1}v$ が正則 holomorphic

(⇔ 複素変数の関数として「微分可能」)

⇔ Cauchy-Riemann の方程式を満たす

曲面論を考えるときには 複素解析が 有用なことがある 「極小曲面の Weierstrass 表現」

$H=0$