幾何学概論第二 (MTH.B212)

3: Weingarten の公式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 17 日

目標

事実

第一基本形式を用いて，曲面上の曲線の長さ・曲線の成す角・領域の面積を求めることができる.

定理

- Weingarten 行列の固有値は実数.
- Weingarten 行列は対角化可能.
- Weingarten の公式：$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$.
- 全臍的曲面

内積と表現行列 (線形代数の復習)

V: $\overset{m}{\cancel{n}}$ 次元線形空間 ($\underset{m}{\cancel{n}} < \infty$)
$\langle\ ,\ \rangle$: 内積
$B := \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$: V の基底 、

定義

内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の基底 B に関する表現行列とは
$M_B := (\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle)_{i,j=1,\dots,m}$ で与えられる m 次対称行列 M_B のことである.

$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ を成分表示して

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{m} v_j \boldsymbol{b}_j = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

とすると

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = (v_1, \dots, v_m) M_B \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

第一基本行列

正則曲面 $p(u,v)$ の点 (u_0,v_0) における接ベクトル空間

$$dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2) = \mathrm{Span}\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

$\nu^{\perp}$ $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

- 第一基本行列 $\widehat{I}$ は $\mathbb{R}^3$ の内積を制限して得られる $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)$ の内積の，基底 $\{p_u, p_v\}$ に関する表現行列．
- (u_0,v_0) における接ベクトル

$$\boldsymbol{a} := a_1 p_u + a_2 p_v, \qquad \boldsymbol{b} := b_1 p_u + b_2 p_v$$
$$(p_u = p_u(u_0,v_0), p_v = p_v(u_0,v_0))$$

の大きさ，内積は

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{E a_1^2 + 2F a_1 a_2 + G a_2^2},$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = E a_1 b_1 + F(a_1 b_2 + a_2 b_1) + G a_2 b_2.$$

ただし E, F, G は第一基本量の (u_0,v_0) における値．

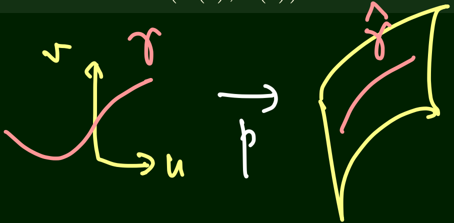
弧長

命題 (命題 3.1)

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$:正則曲面；
$\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ $(a \leqq t \leqq b)$: U 上の曲線；
$\hat\gamma(t) := p \circ \gamma(t)$: 対応する曲面上の曲線 $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\quad \hat\gamma \text{ の弧長 } \overset{s(t)}{} = \int_a^{b\;(t)} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

ただし $E = E(u(t), v(t)), \dots$.



$$\hat\gamma(t) = p(u(t), v(t))$$

$$\left|\frac{d\hat\gamma}{dt}\right| \underset{\text{chain rule}}{=} |\dot u p_u + \dot v p_v|$$

弧長

命題 (命題 3.1)

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$:正則曲面；
$\gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$: U 上の曲線；
$\hat{\gamma}(t) := p \circ \gamma(t)$: 対応する曲面上の曲線；
$s = s(t)$: $\hat{\gamma}$ の弧長パラメータ $\Rightarrow$

$$\frac{ds}{\cancel{dt}} = \sqrt{E\left(\frac{du}{\cancel{dt}}\right)^2 + 2F\frac{du}{\cancel{dt}}\frac{dv}{\cancel{dt}} + G\left(\frac{dv}{\cancel{dt}}\right)^2}.$$

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

面積要素

定義

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して

>0

$$dA := \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{\det \widehat{I}}\,du\,dv$$
$$= |p_u \times p_v|\,du\,dv = |\det(p_u, p_v, \nu)|\,du\,dv$$

を面積要素という．ただし ν は p の単位法線ベクトル場.

$\Omega \subset U$：有界領域で $\overline{\Omega} \subset U$;

$A(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$ の面積 $:= \iint_{\overline{\Omega}} dA$

面積要素

定義

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して

$$dA := \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{\det \widehat{I}}\,du\,dv$$
$$= |p_u \times p_v|\,du\,dv = |\det(p_u, p_v, \nu)|\,du\,dv$$

を面積要素という．ただし ν は p の単位法線ベクトル場．

$\Omega \subset U$：有界領域で $\overline{\Omega} \subset U$;

$$\overline{\Omega}\text{ の面積} = \mathcal{A}(\overline{\Omega}) := \iint_{\overline{\Omega}} dA$$

面積要素

命題

面積 $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ はパラメータの取り方によらない.

重積分の変数変換

$$\iint_{\Omega} dA = \iint_{\Omega} \sqrt{\det \hat{I}}\, du\, dv$$

$$(\xi, \eta) \longmapsto (u, v) \qquad du\,dv$$

J: Jacobi 行列

$$\hat{\hat{I}} = {}^tJ\, \hat{I}\, J \qquad \Omega \quad \tilde{\Omega}$$

$$\iint_{\tilde{\Omega}} \sqrt{\det \hat{\hat{I}}}\; d\xi\, d\eta = \iint_{\tilde{\Omega}} |\det J| \sqrt{\det \hat{I}}\; \cancel{du\,dv}\; d\xi\, d\eta$$

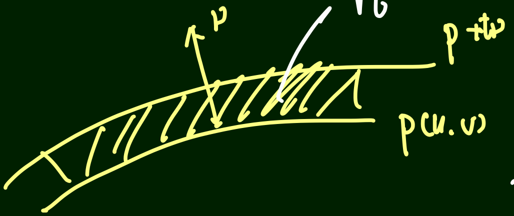
面積要素

命題

正の数 t に対して $\mathbb{R}^3$ の閉領域

$$\{p(u,v)+\tau\nu(u,v)\,;\,(u,v)\in\overline{\Omega},0\leqq\tau\leqq t\}$$

の体積を V_t とすると，$\frac{d}{dt}V_t\Big|_{t\to+0}=A(\overline{\Omega})$.



$$\lim_{t\to0}\frac{V_t}{t}=A(\widetilde{\Omega})$$

主曲率

命題 (命題 3.5)

正則曲面 $p(u,v)$ の各点 (u_0,v_0) における Weingarten 行列 $A := A(u_0,v_0)$ の固有値は実数で，A は実行列により対角化可能.

- $\mathbb{R}^3$ の合同変換で A は不変.

  $p(u_0,v_0) = (0,0,0)$, $\nu(u_0,v_0) = (0,0,1)$

  接平面は xy 平面　　とれる.

  $f(0,0)=0$

  $f_x=f_y=0$

- 曲面は $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$ グラフ表示.

  $A \mapsto J^{-1}AJ$　固有値不変　　パラメータ変換　at $(0,0)$

  以下はこの状態で考える.

  $\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ at $(0,0)$

  $A = \hat{I}^{-1}\hat{II} = \hat{II}$: 対称

主曲率

命題 (命題 3.5)

$H^2 - K \geqq 0$.

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \qquad K = \lambda_1 \lambda_2$$

$$H^2 - K = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geqq 0$$

principal curvatures.

- A の固有値 λ_1, λ_2 を主曲率とよぶ.
- 2 つの主曲率が一致する点を臍点（せいてん）とよぶ.
- 臍点 $\Leftrightarrow$ その点で $H^2 - K = 0$.

umbilic pt

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$: 正則曲面；$\nu$: 単位法線ベクトル場.

定理 (定理 3.7)

$$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A \qquad (A = \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} \text{ は Weingarten 行列}).$$

$\nu\cdot\nu_u = \frac{1}{2}(\nu\cdot\nu)_u = 0 \qquad \nu\cdot\nu_v = 0$

$\nu_u \perp \nu, \quad \nu_v \perp \nu \Rightarrow$ ν_u と ν_v はともに p_u, p_v の線型結合である

$(\nu_u\ \nu_v) = (p_u, p_v)B$

$$-\widehat{II} = \begin{pmatrix} {}^tp_u \\ {}^tp_v \end{pmatrix}(\nu_u\ \nu_v) = \begin{pmatrix} {}^tp_u \\ {}^tp_v \end{pmatrix}(p_u\ p_v)B = \widehat{I}B$$

$\therefore B = -\widehat{I}^{-1}\widehat{II} = -A$

黒板

全臍的曲面

定理 (定理 3.7)

全ての点が臍点である曲面（全臍的曲面）の像は球面または平面の一部.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\quad A = \lambda I \quad \left(I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$\nu_u = -\lambda p_u, \quad \nu_v = -\lambda p_v$

$\nu_{uv} = -\lambda_v p_u - \cancel{\lambda p_{uv}} = \nu_{vu} = -\lambda_u p_u - \cancel{\lambda p_{uv}}$

$\lambda_v p_u = \lambda_u p_v \Rightarrow$ 正則性から $\lambda_u = \lambda_v = 0$

λ: const

$p + \frac{1}{\lambda}\nu =$ 定ベクトル w ← ※

黒板

$\lambda \neq 0$

$$|p - a| = \left|\frac{1}{\lambda}\nu\right| = \left|\frac{1}{\lambda}\right|$$

p は a を中心とする半径 $\dfrac{1}{|\lambda|}$ の球面上にある.

問題 3-1

問題

(2-1) $a=1$, $b=0$

$U = \{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された曲面の第一基本形式が $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\,du^2 + \tanh^2 v\,dv^2$ となるとする．U 上の曲線 $u^2+\cosh^2 v = a^2$（$a>1$）に対応する曲面上の曲線を C_a，直線 $u=b$（$b\in\mathbb{R}$）に対応する曲面上の曲線を L_b とするとき，

1. C_a の長さを求めなさい．
2. C_a と L_b の交点 P における交角を求めなさい．
3. $\overline{\Omega} := \{(u,v)\in U\,;\,a_1^2 \leqq u^2+\cosh^2 v \leqq a_2^2, 0\leqq u\leqq b\}$ に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい．ただし a_1, a_2, b は $1<a_1<a_2$, $0<b<\sqrt{a_1^2-1}$ を満たす定数である．

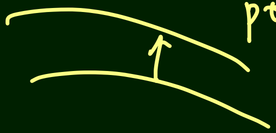
問題 3-2

問題

正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとり，実数 t に対して $p_t(u,v) := p(u,v) + t\nu(u,v)$ とおく．

1. p_t が点 (u_0, v_0) に特異点をもつような t はどういう値か．
2. p の Gauss 曲率が正の定数 K であるとき，p_t が平均曲率一定となるような t の値を求めなさい．

$\tilde{p}$　法線 ν



p

$p + t\nu = \tilde{p}$

平行曲面

$(\tilde{p}_u\ \tilde{p}_v)$

$= (p_u\ p_v)\ ★$

$(\nu_u\ \nu_v) = -(p_u\ p_v)\boxed{A}$

Cayley-Hamilton