幾何学概論第二 (MTH.B212)

3: Weingarten の公式 (補足)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 24 日 (2021/01/07 訂正)

問題 3-1

問題

$U=\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された曲面の第一基本形式が $ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$ となるとする．U 上の曲線 $u^2+\cosh^2 v=a^2$（$a>1$）に対応する曲面上の曲線を C_a，直線 $u=b$（$b\in\mathbb{R}$）に対応する曲面上の曲線を L_b とするとき，

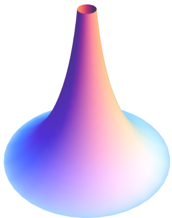
1. C_a の長さを求めなさい．
2. C_a と L_b の交点 P における交角を求めなさい．
3. $\overline{\Omega}:=\{(u,v)\in U\,;\,a_1^2\leqq u^2+\cosh^2 v\leqq a_2^2, 0\leqq u\leqq b\}$ に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい．ただし a_1, a_2, b は $1<a_1<a_2$, $0<b<\sqrt{a_1^2-1}$ を満たす定数である．

問題 3-1

問題

$U=\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された曲面の第一基本形式が $ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$ となるとする．

Beltrami の擬球面



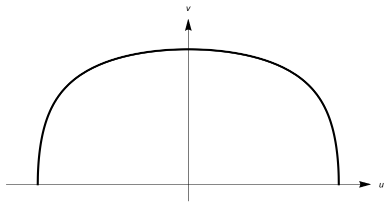
$$p(u,v)=(\cos u\operatorname{sech} v,\sin u\operatorname{sech} v, v-\tanh v)$$

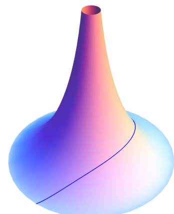
問題 3-1

問題

$U=\{(u,v)\,;\,v>0\}$, $ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$

C_a: $u^2+\cosh^2 v=a^2$（$a>1$） に対応する曲面上の曲線.





$u^2+\cosh^2 v=a^2 \qquad -\sqrt{a^2-1}<u<\sqrt{a^2-1}$

U 上の曲線を $(u(t),v(t))$ $(\dot u>0)$ とパラメータ表示

対応する C_a のパラメータ表示を $\hat\gamma(t)$ と書く．

問題 3-1

問題

$U=\{(u,v)\,;\,v>0\}$, $ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$

C_a: $u^2+\cosh^2 v=a^2$（$a>1$） に対応する曲面上の曲線.

1. C_a の長さを求めなさい．

- 曲線の定義式を微分して $u\dot u+\cosh v\sinh v\dot v=0 \Rightarrow \dot v=-u\dot u\operatorname{sech} v\operatorname{cosech} v$.
- $|\dot{\hat\gamma}|^2=E(\dot u)^2+2F\dot u\dot v+G(\dot v^2)=\operatorname{sech}^2 v\dot u^2+\tanh^2 \dot v^2$

$$\begin{aligned}
(\text{弧長}) &= \int|\dot{\hat\gamma}(t)|\,dt=\int\sqrt{\operatorname{sech}^2 v\dot u^2+\tanh^2 v\,\dot v^2}\,dt\\
&=\int\sqrt{\operatorname{sech}^2 v+\tanh^2 v\operatorname{sech}^2 v\operatorname{cosech}^2 v u^2}\,\dot u\,dt\\
&=\int_{-\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{sech}^2 v\sqrt{\cosh^2 v+u^2}\,du=\int_{-\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{a^2-1}}a\frac{du}{a^2-u^2}\\
&=2\log(a+\sqrt{a^2-1})=2\cosh^{-1}a
\end{aligned}$$

問題 3-1

問題

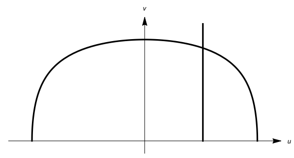
$ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$;

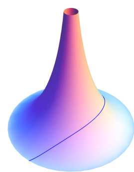
C_a: $u^2+\cosh^2 v=a^2$ に対応する曲線; L_b: $u=b$ に対応する曲線．

2. C_a と L_b の交点 P における交角を求めなさい．

Q

(3) は解き方がわからなかったので講義の解説を理解しようと思う．交角の定義はどの講義資料に書いているのか，どの講義で説明されていたか知りたい．





問題 3-1

問題

$ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$;

C_a: $u^2+\cosh^2 v=a^2$ に対応する曲線; L_a: $u=b$ に対応する曲線．

2. C_a と L_b の交点 P における交角を求めなさい．

- uv-平面上での交点：$(u,v)=\bigl(b,\cosh^{-1}\sqrt{a^2-b^2}\bigr)$
- C_a の接ベクトル：$\dot u p_u+\dot v p_u=\dot u\boldsymbol{v}$; （$\boldsymbol{v}:=p_u-u\operatorname{sech} v\operatorname{cosech} v\,p_v$）
- L_b の接ベクトル：$\boldsymbol{w}:=p_v$．

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}|^2&=\operatorname{sech}^2 v+\tanh^2 v\operatorname{sech}^2 v\operatorname{cosech}^2 v u^2\\
&=\operatorname{sech}^4 v(\cosh^2 v+u^2)=a^2\operatorname{sech}^4 v,\\
|\boldsymbol{w}|^2&=\tanh^2 v,\\
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}&=-u\operatorname{sech} v\operatorname{cosech} v\tanh^2 v=-b\tanh v\operatorname{sech}^2 v,
\end{aligned}$$

$$\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|}=\frac{-b\tanh v\operatorname{sech}^2 v}{a\operatorname{sech}^2 v\tanh v}=-\frac{b}{a}\qquad \angle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\cos^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)=\pi-\cos^{-1}\frac{b}{a}.$$

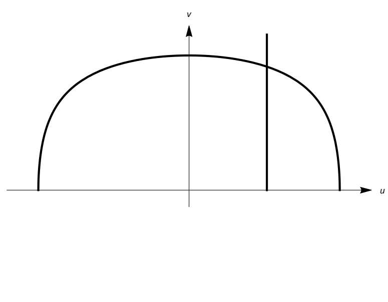
問題 3-1

問題

$ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$;

C_a: $u^2+\cosh^2 v=a^2$ に対応する曲線; L_a: $u=b$ に対応する曲線．

2. C_a と L_b の交点 P における交角を求めなさい．

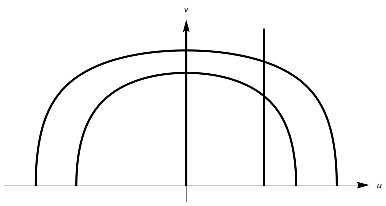


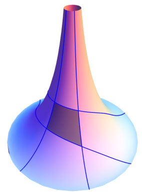
問題 3-1

問題

$ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$

3. $\overline{\Omega} := \{(u,v) \in U\,;\, a_1^2 \leqq u^2 + \cosh^2 v \leqq a_2^2, 0 \leqq u \leqq b\}$ に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい．ただし a_1, a_2, b は $1 < a_1 < a_2$, $0 < b < \sqrt{a_1^2 - 1}$ を満たす定数である．





問題 3-1

問題

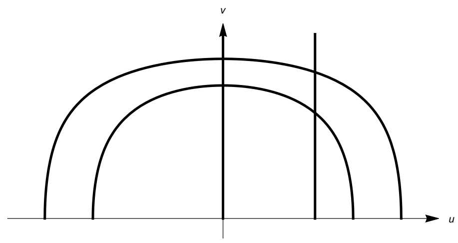
$ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$

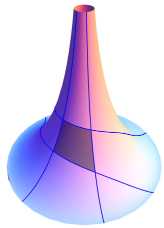
3. $\overline{\Omega} := \{(u,v) \in U\,;\, a_1^2 \leqq u^2 + \cosh^2 v \leqq a_2^2, 0 \leqq u \leqq b\}$ に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい．ただし a_1, a_2, b は $1 < a_1 < a_2$, $0 < b < \sqrt{a_1^2 - 1}$ を満たす定数である．

- $dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \operatorname{sech} v \tanh v\, du\, dv$

$$
\begin{aligned}
(\text{面積}) &= \iint_{\overline{\Omega}} dA = \iint_{\overline{\Omega}} \operatorname{sech} v \tanh v\, du\, dv = \int_0^b du \int_{\cosh^{-1}\sqrt{a_1^2-u^2}}^{\cosh^{-1}\sqrt{a_2^2-u^2}} d(-\operatorname{sech} v) \\
&= \int_0^b du\, [-\operatorname{sech} v]_{\cosh^{-1}\sqrt{a_1^2-u^2}}^{\cosh^{-1}\sqrt{a_1^2-u^2}} = \int_0^b \left(\frac{1}{\sqrt{a_1^2 - u^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_2^2 - u^2}} \right) du \\
&= \sin^{-1}\frac{b}{a_1} - \sin^{-1}\frac{b}{a_2} = \cos^{-1}\frac{b}{a_2} - \cos^{-1}\frac{b}{a_1}
\end{aligned}
$$

問題 3-1





$$
(\text{面積}) = \cos^{-1}\frac{b}{a_2} - \cos^{-1}\frac{b}{a_1}
$$

$$
(\text{内角の和}) = 2\pi - \cos^{-1}\frac{b}{a_2} + \cos^{-1}\frac{b}{a_1}.
$$

問題 3-2

問題

正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとり，実数 t に対して $p_t(u,v) := p(u,v) + t\nu(u,v)$ とおく．

1. p_t が点 (u_0, v_0) に特異点をもつような t はどういう値か．
2. p の Gauss 曲率が正の定数 K であるとき，p_t が平均曲率一定となるような t の値を求めなさい．

問題 3-2

$p + t\nu$: p の平行曲面

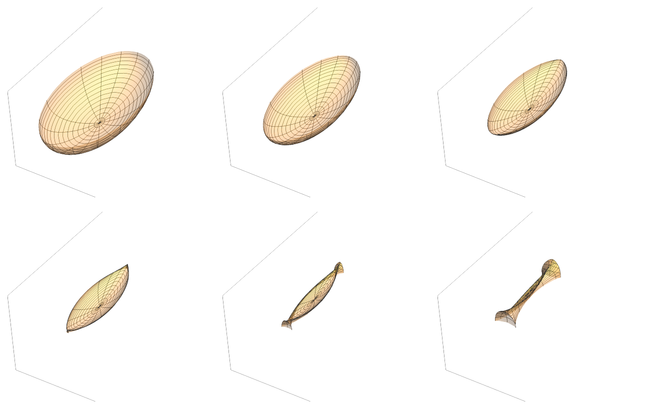
Q

- 3-2 において，正則曲面に対する平行鏡面が特異点をもつことのイメージしやすい例で，球面以外にどのようなものがあるのでしょうか．
- 3-2 のような移動で得られるものを平行曲面と言われてましたが，曲面は各点でそれぞれ法線方向を向くので一般には平行らしさはないように思いました（球面だったら膨らんでいくような動き方をするはず）．これは見方を変えればどこかに平行移動を見出すことができたりするのでしょうか．
- 正則曲面の平行曲面に特異点ができることがあるのはなぜですか．(平行に動かしただけでは特異点はできないと思ったのですが)．

A

平行曲面は平行移動ではない．

問題 3-2



問題 3-3

問題

正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとり，実数 t に対して $p_t(u,v) := p(u,v) + t\nu(u,v)$ とおく．

1. p_t が点 (u_0, v_0) に特異点をもつような t はどういう値か．

- $\tilde{p} := p_t = p + t\nu$ と書く．
- $(\tilde{p}_u, \tilde{p}_v) = (p_u, p_v) + t(\nu_u, \nu_v) = (p_u, p_v)(I - tA)$; A: Weingarten 行列
- $\tilde{p}$ が正則 $\Leftrightarrow$ $\{\tilde{p}_u, \tilde{p}_v\}$ が一次独立 $\Leftrightarrow$ $(I - tA) = -t\left(A - \frac{1}{t}I\right)$ が正則 $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{t}$ は A の固有値（主曲率）

t が p の (u_0, v_0) における主曲率の逆数 $\Rightarrow$ $\tilde{p}$ は (u_0, v_0) に特異点をもつ．

問題 3-2

問題

正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとり，実数 t に対して $p_t(u,v) := p(u,v) + t\nu(u,v)$ とおく．

2. p の Gauss 曲率が正の定数 K であるとき，p_t が平均曲率一定となるような t の値を求めなさい．

- $\tilde{p} := p_t = p + t\nu$ と書く．
- $(\tilde{p}_u, \tilde{p}_v) = (p_u, p_v)(I - tA) \Rightarrow \nu \perp \tilde{p}_u$, $\nu \perp \tilde{p}_v$ $\Rightarrow \nu$ は $\tilde{p}$ の単位法線ベクトル場
- $(\nu_u, \nu_v) = -(\tilde{p}_u, \tilde{p}_v)\widetilde{A}$；$\widetilde{A}$: $\tilde{p}$ の Weingarten 行列；$\Rightarrow \widetilde{H} = (\tilde{p}$ の平均曲率$) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\widetilde{A}$
- $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A = -(\tilde{p}_u, \tilde{p}_v)(I - tA)^{-1}A$

$$
\boxed{\widetilde{A} = (I - tA)^{-1}A}
$$

問題 3-2

問題

2. p の Gauss 曲率が正定数 K のとき，$\tilde{p} = p_t$ が平均曲率一定となる t は？

- $\widetilde{A} = (I - tA)^{-1}A$

$$\boxed{(I - tA)^{-1} = \frac{tA - (t\operatorname{tr} A - 1)I}{1 - t\operatorname{tr} A + t^2 \det A}}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= (I - tA)^{-1}A = \frac{tA^2 - (t\operatorname{tr} A - 1)A}{1 - t\operatorname{tr} A + t^2 \det A} \\
&= \frac{t(\operatorname{tr} AA - \det AI) - (t\operatorname{tr} A - 1)A}{1 - t\operatorname{tr} A + t^2 \det A} = \frac{A - t\det AI}{1 - t\operatorname{tr} A + t^2 \det A} \\
&= \frac{A - tKI}{1 - 2tH + t^2 K}, \\
\widetilde{H} &= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tr} A - tK\operatorname{tr} I}{1 - 2tH + t^2 K} = \frac{H - 2tK}{1 - 2tH + t^2 K}
\end{aligned}$$

問題 3-2

問題

2. p の Gauss 曲率が正定数 K のとき，$\tilde{p} = p_t$ が平均曲率一定となる t は？

$$\boxed{\widetilde{H} = \frac{H - 2tK}{1 - 2tH + t^2 K}.}$$

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2t}\left(\frac{1 - t^2 K}{1 - 2tH + t^2 K} - 1\right)$$

$$\boxed{(\widetilde{H} \text{ が一定}) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - t^2 K = 0}$$

cf. テキスト，付録 B-6

問題 3-2（補足；2 次行列の線形代数）

$$\boxed{(I - tA)^{-1} = \frac{tA - (t\operatorname{tr} A - 1)I}{1 - t\operatorname{tr} A + t^2 \det A}}$$

1. Cayley-Hamilton を使う
2. 余因子行列を用いる：2 次正方行列 A に対して $\widetilde{A} := (\operatorname{tr} A)I - A$ とすると $\widetilde{A}$ は A の余因子行列
   - $A \mapsto \widetilde{A}$ は線型
   - $A\widetilde{A} = \widetilde{A} = (\det A)I$. とくに A が正則なら $A^{-1} = \widetilde{A}/\det A$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{(I - tA)} &= (2 - t\operatorname{tr} A)I - I + tA = (1 - t\operatorname{tr} A)I + tA, \\
(I - tA)\widetilde{(I - tA)} &= (I - tA)\big((1 - t\operatorname{tr} A)I + tA\big) = (1 - t\operatorname{tr} A + t^2 \det A)I, \\
\det(I - tA) &= 1 - t\operatorname{tr} A + t^2 \det A, \\
(I - tA)^{-1} &= \frac{tA - (t\operatorname{tr} A - 1)I}{1 - t\operatorname{tr} A + t^2 \det A}
\end{aligned}$$