幾何学概論第二 (MTH.B212)

4: Gauss の公式

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 24 日 (2021/01/07 訂正)

目標

定理 (命題 4.4)

正則曲面 p の点 (u_0, v_0) における法曲率の最大値・最小値は主曲率である．

定理 (定理 4.7)

正則曲面 $p(u,v)$ の Gauss 枠 $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ は次を満たす：

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$
$$\Omega := \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

$(A = (A_i^j)_{i,j=1,2}$ **は Weingarten 行列，Γ_{ij}^k は Chrstoffel 記号)．**
とくに $\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$（適合条件）

直交直和分解

- $p(u,v)$：**正則曲面；**$\nu(u,v)$：**単位法線ベクトル場．**
- $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2) = \mathrm{Span}\{p_u, p_v\} = \nu(u,v)^{\perp}$

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2) \oplus \mathbb{R}\nu(u,v) \quad \text{（直交直和）}}$$

$\boldsymbol{v}$ の直和分解：

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = \text{(接成分)} + \text{(法成分)}$$

注意

$[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = (\boldsymbol{v} \cdot \nu(u,v))\nu(u,v), \quad [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{v} - [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}.$

曲線の法曲率

- $p(u,v)$: **正則曲面；**ν: **単位法線ベクトル場**
- $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$: **平面曲線**
- $\hat{\gamma}(t) = p \circ \gamma(t)$: **曲面上の曲線**
- $\boxed{\text{仮定}}$ t **は** $\hat{\gamma}(t)$ **の弧長パラメータ：**
  $E(\dot{u})^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G(\dot{v})^2 = 1$

定義

$\kappa_n(t) := \ddot{\hat{\gamma}}(t) \cdot \nu \circ \gamma(t)$: **法曲率**

補題

$\kappa_n = L(\dot{u})^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N(\dot{v}^2)$. **ただし** L, M, N **は第二基本量．**

方向の法曲率

- $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$：**平面ベクトル，**$E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1$**．**
- $\kappa_n(\boldsymbol{v}) := L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$.

命題

ベクトル $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$ が $E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1$ を満たしながら動くとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$ の最大・最小値は主曲率．

Gauss 枠

- $p(u,v)$: **正則曲面；**ν: **単位法線ベクトル場．**
- $\mathcal{F}(u,v) := (p_u(u,v), p_v(u,v), \nu(u,v))$ **を Gauss 枠という．**
- L, M, N: **第二基本量；**$A = (A_i^j)$: **行列**

定理 (定理 4.7)

正則曲面 $p(u,v)$ の Gauss 枠 $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ は次を満たす：

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$
$$\Omega := \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

$(A = (A_i^j)_{i,j=1,2}$ **は Weingarten 行列，Γ_{ij}^k は Christoffel 記号)．**

Christoffel 記号

正則曲面 $p(u,v)$ **に対して**

$$[p_{uu}]^{\mathrm{T}} = \Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v,$$
$$[p_{uv}]^{\mathrm{T}} = \Gamma_{12}^1 p_u + \Gamma_{12}^2 p_v = \Gamma_{21}^1 p_u + \Gamma_{21}^2 p_v,$$
$$[p_{vv}]^{\mathrm{T}} = \Gamma_{22}^1 p_u + \Gamma_{22}^2 p_v$$

を満たす (u,v) **の関数** Γ_{ij}^k **が存在する．Christoffel 記号**

命題 (命題 4.5)

Christoffel 記号は第一基本量で表される．

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2\Delta}(GE_u - 2FF_u + FE_v),$$
$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2\Delta}(GE_v - FG_u),$$
$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2\Delta}(2GF_v - GG_u - FG_v),$$
$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2\Delta}(-FE_u + 2EF_u - EE_v),$$
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2\Delta}(-FE_v + EG_u),$$
$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2\Delta}(-2FF_v + FG_u + EG_v).$$

Christoffel 記号

Gauss-Weingarten **の公式**

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$
$$\Omega := \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

命題

$\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$

問題 4-1

問題

曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ **の単位法線ベクトル場を** $\nu(u,v)$ **とする．曲面の第一基本形式，第二基本形式が** $ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + dv^2$, $II = 2\sin\theta\,du\,dv$ **と書けているとき，Gauss 方程式，Weingarten 方程式の適合条件を** θ **を用いて表しなさい．ただし** $\theta = \theta(u,v)$ **は区間** $(0,\pi)$ **に値をとる** C^∞**-級関数．**

問題 4-2

問題

領域 $U = \{(u,v)\,;\, v > 0\}$ **で定義された正則曲面** $p(u,v) := (\cos u \operatorname{sech} v, \sin u \operatorname{sech} v, v - \tanh v)$ **を考える．定数** a (>1) **に対して，**U **上の曲線** $u^2 + \cosh^2 v = a^2$ **を** $\gamma(t) := (u(t), v(t))$ **(**$\dot{u} > 0$, $\dot{} = d/dt$**) と表示し，**$\hat{\gamma}(t) = p \circ \gamma(t)$ **とする．**

1. t **が** $\hat{\gamma}(t)$ **の弧長パラメータとなっているとき，**$\dot{u} = \frac{1}{a}\cosh^2 v$, $\dot{v} = -\frac{u}{a}\operatorname{cotanh} v$ **が成り立つことを示しなさい．**
2. **曲面上の曲線** $\hat{\gamma}$ **の法曲率を** κ_n, **空間曲線としての曲率を** κ **とするとき，**$|\kappa_n/\kappa|$ **を求めなさい．**