2020 年 12 月 24 日 (2021 年 1 月 7 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 4

■お知らせ

- 今回は 27 名の提出がありました．
- 今回の提出物の締切は 2021 年 1 月 2 日（土曜日）23:59 とします．
- 2021 年 1 月 7 日には「定期試験予告」を行います．みなさまお誘い合わせの上，ご出席ください．

■前回までの訂正

- フライパンの熱伝導の話，「フロギストンが流れる」と言いましたがフロギストン（燃素）ではなく「カロリック」(熱素）であるというご指摘が複数ありました．ありがとうございます．
- 講義資料 4, 3 ページ，命題 3.1 の 1 行目：正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，⇒ 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ と，
- 講義資料 4, 3 ページ，命題 3.1 の 1 行目：曲面状 ⇒ 曲面上
- 講義資料 4, 4 ページ，定理 3.8 の証明の 3 行目：$\lambda_v p_u + \lambda_u p_v = \mathbf{0}$ ⇒ $\lambda_v p_u - \lambda_u p_v = \mathbf{0}$
- 講義資料 4, 4 ページ，定理 3.8 の証明の 5 行目：$(\lambda p_\nu)_v$ ⇒ $(\lambda p + \nu)_v$
- 映写資料 1, 13 ページ，A の下から 3 行目：$\nu := p_u \times p_v/|p_u \times p_v|$ ⇒ $\nu := (p_u \times p_v)/|p_u \times p_v|$
- 映写資料 2, 4, 5 ページ，事実の 1 項：$\theta = 4\tan^{-2} e^v$ ⇒ $\theta = 4\tan^{-2} e^{-v}$
- 映写資料 2, 7 ページ，3 行目：$du^2 + a^2\tanh^2 v + d\sigma^2$ ⇒ $du^2 + \tanh^2 v + d\sigma^2$
- 黒板 3, 9 ページ，右下．$\iint_\Omega |\det J|\sqrt{\det \widehat{I}}\, d\xi\, d\eta$ ⇒ $\iint_{\widetilde{\Omega}} |\det J|\sqrt{\det \widehat{I}}\, d\xi\, d\eta$

■授業に関する御意見

- フライパンを熱したときに広がるのはフロギストン（燃素）よりもカロリック（熱素）のほうが妥当（というのも変だが）ではないかと思いました．　**山田のコメント：** ご指摘ありがとうございます．他の方からもご指摘いただきました．
- 無理ゲーと思いつつ式を見てたら，どこかで計算したような...という記憶から 1 回目の授業のプリントを見直してビックリしました．一度計算しておいて良かったです．　**山田のコメント：** でしょ．
- 年が変わるタイミングで課題提出用紙の年の箇所を改めるべきだと思います（2020 年だと困るので）．
  山田のコメント： おっしゃるとおりですね．今回は提出期限を変更しますので，用紙も変更します．
- 曲線パラメータをとる時，ついグラフ描画ソフトに手が伸びがちですが，勉強を進めればグラフなしでもイメージできるようになれるのでしょうか．　**山田のコメント：** 「曲線パラメータ」とは何でしょうか．

■質問と回答

質問 1： 今回は面積も扱いましたが，「面積要素」という言葉の由来は何ですか？　**お答え：**"微小長方形の面積"．ちょっといい加減な言い方ですが，(u, v), $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ を頂点とする uv 平面上の長方形領域の像の面積は $\sqrt{EG - F^2}\Delta u\Delta v +$ (Δu, Δv の高次の項) とかける．もう少しきちんと述べるには「微分形式」を使う必要がありそう．

質問 2： 主曲率でガウス曲率と平均曲率が表されるので，実質主曲率だけ定義しておけばそれで足りてしまうような気がしました．主曲率，ガウス曲率，平均曲率はなぜ 3 つとも定義する必要があるのでしょうか．　**お答え：**Gauss・平均曲率自体にも幾何学的な意味があるから．また，Gauss 曲率は第一基本量のみから定まる（第 5 回講義；驚異の定理）が，主曲率はそうではない．

質問 3： 黒板 3 の命題 3.5 の証明において，$\mathbb{R}^3$ の等長変換で Weingarten 行列 A は不変とあったが p の単位法ベクトル場に対して，$\tilde{p}$ の単位法ベクトル場を適切にとれば不変である，ということでしょうか．　**お答え：**はい．講義資料 2, 命題 2.2 の意味で．

質問 4： 曲面 $p(u_0, v_0)$ における主曲率 $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ であることと (u_0, v_0) が特異点であることは同値ですか？
お答え： 講義資料 3, 命題 3.5 より主曲率は実．

質問 5： 臍点は図形上ではどのような点を指すのですか．3-2 の 1 では $\sqrt{H^2 - K} = 0$ となり，特異点が 1 つになりました...
お答え： すべての向きの法曲率が一致する（今回少し説明する）．「特異点が一つ」ではなく「特異点となる t の値が一つ」ですね．

質問 6： 臍点がないことは図形にどう表れますか．　**お答え：**たとえば曲率線座標がとれる．テキスト 99 ページ．

質問 7： 半径 r の球面（Gauss 曲率：$\frac{1}{r^2}$，平均曲率：$\pm\frac{1}{r}$）や平面（Gauss 曲率，平均曲率ともに 0）上の点はすべて臍点となりますが，逆に曲面上の全ての点が臍点となる曲面にはどんなものがありますか．直観的には球・平面に限られるように感じるのですが，その証明に行き詰まり質問した次第です．証明の方針等をご教示いただきたいです．　**お答え：**講義資料 3, 定理 3.8

質問 8： 定理 3.8 の逆，つまり p の像が球面か平面の一部なら p は全臍的でしょうか？反例が思いつかなかったので質問しました．
お答え： 球面も平面も「特定の曲面」だから具体的に表示できるので，結論は単純計算．

質問 9： 3-2 において，正則曲面に対する平行曲面が特異点をもつことのイメージしやすい例で，球面以外にどのようなものがあるのでしょうか．　**お答え：**たとえば円柱面・楕円面は？（講義でお見せします）

質問 10： 3-2 のような移動で得られるものを平行曲面と言われてましたが，曲面は各点でそれぞれ法線方向を向くので一般には平行らしさはないように思いました（球面だったら膨らんでいくような動き方をするはず）．これは見方を変えればどこかに平行移動を見出すことができたりするのでしょうか．　**お答え：**平行移動といってないので，むりに平行移動を持ち出す必要はないのでは？

質問 11： 正則曲面の平行曲面に特異点ができることがあるのはなぜですか．（平行に動かしただけでは特異点はできないと思ったのですが）． **お答え：**平行移動ではない．平行曲面の定義は？

質問 12： $\mathbb{R}^n$ の中で m 個のパラメータで記述される部分集合を考えたとき，座標変換によってその座標変換のヤコビ行列を J としたときに，各点において A から $J^{-1}AJ$ に変わる行列 A を見つければ，その固有多項式が座標変換に対する不変量になると思いますが，その様な行列 A を一般に作ることはできますか？ **お答え：**はい．$m = n-1$ のとき（超曲面という）のときには単位法線ベクトル場が $\pm$ の任意性を除いて一意に定まるので，$\mathbb{R}^3$ の場合と同様に第一基本量，第二基本量，Weingarten 行列が定義されます．$m < n-1$ のときは法線方向が一つに決まらないので少し修正が必要.

質問 13： 授業は 3 次元の曲面についてだが，より一般に n 次元でも同様に第一，第二基本量などが定義され，そこから長さや面積が求められるのでしょうか． **お答え：**「3 次元の曲面」という言い方は不適切.「3 次元空間内の曲面」というべきでしょう．曲面自体は 2 次元的な図形（2 つのパラメータで表示できる）．$\mathbb{R}^n$ の超曲面の第一，第二基本行列は $(n-1)\times(n-1)$ 行列.

質問 14： 例えばパラメータ u, v, w で指定される超曲面の面積要素を $|\det(p_u, p_v, p_w)|du dv dw$ のようにかけると思うのですが，これは一般化になっていますか? **お答え：**3 パラメータで書ける超曲面は $\mathbb{R}^4$ に入っているはずなので p_u などは 4 次の列ベクトル．したがって，(p_u, p_v, p_w) は 4×3 行列なので行列式がとれません.

質問 15： 注意 3.4 の証明の詳細を考えてみました．下の方針でよろしいでしょうか．(1) 変数変換 $(x, y, z) = p(u, v) + \tau\nu(u, v)$ の行列式は $\det(p_u + \tau\nu_u, p_v + \tau\nu_v, \nu) = (\text{中略}) = \det(p_u, p_v, \nu) + \tau F(u, v)$ （$F(u, v)$ は τ に依存しない）．(2) よって V_t は次で与えられる：

$$V_t = \iiint dx\,dy\,dz = \iint_{\overline{\Omega}\,du\,dv} \int_{\tau=0}^{\tau=t} (\det(p_u, p_v, \nu) + \tau F) d\tau = t \iint_{\overline{\Omega}} \det(p_u, p_v, \nu)\,du\,dv + \frac{1}{2}t^2 \iint_{\overline{\Omega}} F\,du\,dv.$$

(3) よって求める極限は $\displaystyle\lim_{t\to+0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t\to+0} \left(\mathcal{A}(\overline{\Omega}) + \frac{1}{2}t \iint_{\overline{\Omega}} F\,du\,dv\right) = \mathcal{A}(\overline{\Omega})$.

お答え： だいたい正しいですが，(1) の $F(u, v)$ は τ に依存してしまいます（τ の 2 次以上の項があるので）．しかし，全体が τ でくくられているので，最後の極限をとったときに消えます.

質問 16： 講義資料 3 の定理 3.8 の証明にて $\lambda_u = \lambda_v = 0$，$U$ の連結性から λ は定数，とあるが U の連結性が何故必要なのか分かりませんでした． **お答え：**U が連結でないとき，U の各連結成分ごとに異なる値を取りうる.

質問 17： 教科書 p. 82 で (8.4) の A で $\det A$ を計算すると $LN - M^2$ となり，(8.6) には $\det A = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ となっているのはなぜですか． **お答え：**あなたの計算が間違っているからです．(8.4) の det を計算するときに $\det(kB) = k^2 \det B$（2 次行列の場合）を使わなければなりませんがひょっとして 2 乗を忘れてませんか？

質問 18： 問 3-1 の最後の原始関数が求められませんでした．求めることができるのでしょうか？それともパラメータ変換の取り方が悪いのでしょうか． **お答え：**積分 $\int \frac{dt}{t\sqrt{a^2-t^2}}$ ですね．定石通り $t = a\sin\theta$ とおけば $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ の積分に帰着できる.

質問 19： 曲面上の曲線に関する問題を考える際に，大抵の人間は「平面」の紙に書いて思考するかと思いますが，その時には「平面の各点について内積や積分やその他の数学的操作が平面でのそれと異なる」平面の曲線の問題を考えている，と捉えてよいですね．**お答え：**はい，それが「地図上で考える」ということですね.

質問 20： 教科書 P86 に，ガウス曲率が正となる点，負となる点のまわりの図が描かれていて，楕円点の図のようなかたちをしたものは天然ものでわりと思いつく（りんごなど）けれど，図のような形をしたものはあまり思いつきませんでした．力学的に双曲点のようなかたちは作りにくいなどといった理由はあるのでしょうか.

お答え： 作りにくいんですか？ Pear (洋梨) の表面には双曲点がありますが．こんなのも：`https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=46848767`

質問 21： 擬球面の「擬」の由来はなんでしょうか．似ている点は「ガウス曲率が 1, -1 である」こと,「全ての点が臍点，全ての点が臍点でない」などがあると思いますが，これだけだと擬というより反対とかの方が合いそうだと思いました.

お答え： Beltrami がどう思ったのかはわかりませんが，「定曲率」だということから類似の公式が得られます．たとえばガウス曲率 1 の球面上の直角三角形 ABC (C が直角となる頂点) の辺の長さを a, b, c とすると，球面的ピタゴラスの公式 $\cos a \cos b = \cos c$ が成り立ちますが，ガウス曲率 -1 では $\cosh a \cosh b = \cosh c$ が成り立ちます.

質問 22： 物理の解析力学は，パラメータのとり方によらない力学の記述方式であり，その点において，今扱っているものも同じ性質をもっています．このつながりはグウゼンでしょうか.

お答え： いいえ（たぶん）．幾何学の記述はパラメータによらないことが要請されます．解析力学の定式化はその一つの例です.

質問 23： 交角は一次近似したとき 2 つ考えられますが，（やはり）これら 2 つをともに交角と呼ぶのでしょうか.

お答え： はい．特定するには曲線の方向を決めておく必要があります.

質問 24： (3) は解き方がわからなかったので講義の解説を理解しようと思う．交角の定義はどの講義資料に書いているのか，どの講義で説明されていたか知りたい． **お答え：**前半：ただ定義どおりに積分するだけ．重積分ができればできる．後半：講義では説明していない．空間曲線の「交角」だがどう定義すればよいか想像してほしい（たぶん定義は一通りしかないはず）．もしご自分が想像した定義に自信がないならば，その定義を明記しておけばよい.

質問 25： 成績を決定する $z := (1-a)4x + ay$ だが，$4x$ が目標の点数を超えていたら $a = 1$（原文ママ：$a = 0$ のことか）にするし，そうでないなら $a = 1$ として $4x < y$ となるように試験を頑張るだけなので，$a = 0$ or $a = 1$ で十分な気がします.

お答え： 試験の評価でどの程度「ギャンブル」ができるか，それまで含めて個人の判断を尊重します.

4 Gauss の公式

■$\mathbb{R}^3$ の直和分解 正則曲面 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場を ν とする．このとき，各 $(u,v)\in U$ に対して $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)=\operatorname{Span}\{p_u,p_v\}$ は $\nu(u,v)$ に直交する $\mathbb{R}^2$ の 2 次元部分空間だから，直交直和分解 $\mathbb{R}^3=dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)\oplus\mathbb{R}\nu(u,v)$ が成り立つ．任意のベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ は

$$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}+[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}};\qquad [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}\in dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)=\operatorname{Span}\{p_u(u,v),p_v(u,v)\},\quad [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}\in\mathbb{R}\nu(u,v)$$

と一意的に分解できる．$[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$, $[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}$ をそれぞれ $(u,v)\in U$ における $\boldsymbol{v}$ の**接成分**, **法成分**という．

注意 4.1. $[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}=(\boldsymbol{v}\cdot\nu(u,v))\nu(u,v)$, $[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{v}-[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}$.

■法曲率 正則曲面 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ と U 上の正則曲線 $\gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ を考えると，空間曲線 $\hat\gamma(t):=p\circ\gamma(t)$ が得られる．とくに $\hat\gamma(t)$ は正則曲線なので，パラメータを弧長パラメータに取り替えることができる．以下 t は $\hat\gamma(t)$ の弧長パラメータとする．すなわち第一基本量 E, F, G を用いて $E(\dot u)^2+2F\dot u\dot v+G(\dot v)^2=1$.

定義 4.2. 曲面 p 上の曲線 $\hat\gamma$ に対して $\kappa_n(t):=\ddot{\hat\gamma}(t)\cdot\nu\circ\gamma(t)$ を $\hat\gamma(t)$ の t における**法曲率**という．

補題 4.3. $\left[\ddot{\hat\gamma}(t)\right]^{\mathrm{N}}=\kappa_n\nu$, また $\kappa_n=L(\dot u)^2+2M\dot u\dot v+N(\dot v)^2$. ただし L, M, N は第二基本量.

証明： $\dot{\hat\gamma}=\dot u p_u+\dot v p_v$, $\ddot{\hat\gamma}=\ddot u p_u+\ddot v p_v+\dot u(\dot u p_{uu}+\dot v p_{uv})+\dot v(\dot u p_{vu}+\dot v p_{vv})=\ddot u p_u+\ddot v p_v+\dot u^2 p_{uu}+2\dot u\dot v p_{uv}+\dot v^2 p_{vv}$ なので $p_u\cdot\nu=p_v\cdot\nu=0$, $p_{uu}\cdot\nu=L,\dots$ を用いればよい．

■法曲率と主曲率 補題 4.3 より法曲率は曲線の接ベクトルのみで定まる．そこで $(u_0,v_0)\in U$ を固定して，

(4.1) $$|\hat{\boldsymbol{v}}|^2=E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2=1\qquad(E,\ F,\ G\ \text{は第一基本量の}\ (u_0,v_0)\ \text{における値})$$

を満たす $\boldsymbol{v}=(\alpha,\beta)$ に対して

(4.2) $$\kappa_n(\boldsymbol{v}):=L\alpha^2+2M\alpha\beta+N\beta^2\qquad(L,\ M,\ N\ \text{は第二基本量の}\ (u_0,v_0)\ \text{における値})$$

と定めると，これは $\dot{\hat\gamma}=\hat{\boldsymbol{v}}:=\alpha p_u+\beta p_v$ となる曲線の点 $\mathrm{P}:=p(u_0,v_0)$ における法曲率と一致する．

命題 4.4. ベクトル $\boldsymbol{v}=(\alpha,\beta)$ が (4.1) を満たしながら変化するとき，(4.2) の $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ の最大値・最小値は点 (u_0,v_0) の主曲率である．ただし，第一基本量，第二基本量は (u_0,v_0) での値とする．

証明： (4.1) の下で (4.2) の最大・最小を求める条件付き極値問題である．(4.1) を満たす (α,β) 全体は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合なので κ_n は最大・最小値をとる．そこで $\Phi(\alpha,\beta,\lambda):=\kappa_n(\boldsymbol{v})-\lambda(|\hat{\boldsymbol{v}}|^2-1)$ に対して Lagrange の未定係数法を適用すれば，κ_n が最大・最小値をとるとき $(\widehat{I\!I}-\lambda\widehat{I})\binom{\alpha}{\beta}=\boldsymbol{0}$ がなりたつ．このとき $\binom{\alpha}{\beta}$ は $A=\widehat{I}^{-1}\widehat{I\!I}$ の固有ベクトルで，対応する固有値は λ. これが $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ の値である．

■Christoffel の記号 正則曲面 $p(u,v)$ に対して $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)=\operatorname{Span}\{p_u(u,v),p_v(u,v)\}$ だから

$$[p_{uu}]^{\mathrm{T}}=\Gamma_{11}^1p_u+\Gamma_{11}^2p_v,\quad [p_{uv}]^{\mathrm{T}}=\Gamma_{12}^1p_u+\Gamma_{12}^2p_v=\Gamma_{21}^1p_u+\Gamma_{21}^2p_v,\quad [p_{vv}]^{\mathrm{T}}=\Gamma_{22}^1p_u+\Gamma_{22}^2p_v$$

を満たす (u,v) の関数 Γ_{ij}^k が存在する．これらを p の **Christoffel 記号**という．

2020 年 12 月 24 日 (2021 年 1 月 7 日訂正)

命題 4.5. 第一基本量を用いて Christoffel 記号を次のように表すことができる．ただし $\Delta := EG - F^2$：

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2\Delta}(GE_u - 2FF_u + FE_v),\quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2\Delta}(GE_v - FG_u),\quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2\Delta}(2GF_v - GG_u - FG_v),$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2\Delta}(-FE_u + 2EF_u - EE_v),\quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2\Delta}(-FE_v + EG_u),\quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2\Delta}(-2FF_v + FG_u + EG_v).$$

証明： $p_{uu}\cdot p_u = \frac{1}{2}(p_u\cdot p_u)_u = \frac{E_u}{2}$, $p_{uv}\cdot p_u = \frac{1}{2}(p_u\cdot p_u)_v = \frac{E_v}{2}$, $p_{vv}\cdot p_u = (p_v\cdot p_u)_v - (p_v\cdot p_{uv}) = F_v - \frac{G_u}{2}$, $p_{uu}\cdot p_v = F_u - \frac{E_v}{2}$, $p_{uv}\cdot p_v = \frac{G_u}{2}$, $p_{vv}\cdot p_v = \frac{G_v}{2}$ なので

$$\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix}(p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}) = \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix}(p_u, p_v)\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

ここで $\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix}(p_u, p_v) = \widehat{I}$ なので結論が得られる．

■Gauss の公式と適合条件　正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル場 ν をとり，第二基本量を L, M, N, Christoffel 記号を Γ^k_{ij} と書く．

補題 4.6 (Gauss の公式)**.**

$$p_{uu} = \Gamma^1_{11}p_u + \Gamma^2_{11}p_v + L\nu,\quad p_{uv} = \Gamma^1_{12}p_u + \Gamma^2_{12}p_v + M\nu,\quad p_{vv} = \Gamma^1_{22}p_u + \Gamma^2_{22}p_v + N\nu.$$

証明： 第二基本量の定義から $[p_{uu}]^{\mathrm{N}} = L\nu\ldots$ このことと Christoffel 記号の定義から結論が得られる．

以上の状況で， $\mathcal{F}(u,v) := \bigl(p_u(u,v), p_v(u,v), \nu(u,v)\bigr)$ は 3 次の正則行列に値をとる (u,v) の関数である．これを **Gauss 枠**という．Weingarten の公式と Gauss の公式を合わせて次を得る：

定理 4.7. 正則曲面の Gauss 枠は次を満たす：

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega,\quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,\qquad \Omega := \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & -A^1_1 \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & -A^2_1 \\ L & M & 0 \end{pmatrix},\quad \Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} & -A^1_2 \\ \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} & -A^2_2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし $A = (A^j_i)_{i,j=1,2}$ は Weingarten 行列である．

系 4.8 (適合条件)**.** 定理 4.7 の Ω, Λ は次を満たす：$\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$.

証明： $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$ を v で微分して $\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_v\Omega + \mathcal{F}\Omega_v = \mathcal{F}(\Lambda\Omega + \Omega_v)$．同様に $\mathcal{F}_{vu} = \mathcal{F}(\Omega\Lambda + \Lambda_u)$．$\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}$ と $\mathcal{F}$ が正則行列であることから結論が得られる．

問題

4-1 曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場を $\nu(u,v)$ とする．曲面の第一基本形式，第二基本形式が $ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + dv^2$, $I\!I = 2\sin\theta\,du\,dv$ と書けているとき，Gauss, Weingarten の公式の適合条件を θ を用いて表しなさい．ただし $\theta = \theta(u,v)$ は区間 $(0,\pi)$ に値をとる C^∞-級関数.

4-2 領域 $U = \{(u,v)\,;\,v > 0\}$ で定義された正則曲面 $p(u,v) := (\cos u\,\mathrm{sech}\,v, \sin u\,\mathrm{sech}\,v, v - \tanh v)$ を考える．定数 a (> 1) に対して，U 上の曲線 $u^2 + \cosh^2 v = a^2$ を $\gamma(t) := (u(t), v(t))$ $(\dot u > 0,\ \dot{} = d/dt)$ と表示し，$\hat\gamma(t) = p\circ\gamma(t)$ とする．

(1) t が $\hat\gamma(t)$ の弧長パラメータとなっているとき，$\dot u = \frac{1}{a}\cosh^2 v$, $\dot v = -\frac{u}{a}\,\mathrm{cotanh}\,v$ が成り立つことを示しなさい．

(2) 曲面上の曲線 $\hat\gamma$ の法曲率を κ_n, 空間曲線としての曲率を κ とするとき，$|\kappa_n/\kappa|$ を求めなさい．