幾何学概論第二 (MTH.B212)

4: Gauss の公式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2020 年 12 月 24 日

目標

定理 (命題 4.4)

主曲率のいみ.

正則曲面 p の点 (u_0, v_0) における法曲率の最大値・最小値は主曲率である.

定理 (定理 4.7)

Frenet の公式

正則曲面 $p(u,v)$ の Gauss 枠 $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ は次を満たす：

3×3

Gauss frame

E, F, G, L, M, N

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$

$$\Omega := \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

($A = (A_i^j)_{i,j=1,2}$ は Weingarten 行列, Γ_{ij}^k は Chrstoffel 記号).
とくに $\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$（適合条件）

直交直和分解

- $p(u, v)$：正則曲面；$\nu(u, v)$：単位法線ベクトル場.
- $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2) = \mathrm{Span}\{p_u, p_v\} = \nu(u, v)^{\perp}$

$\mathbb{R}^3$の2次元部分空間

線空.

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \underbrace{dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)}_{} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\mathbb{R}\nu(u, v)}_{} \quad (\text{直交直和})}$$

$\boldsymbol{v}$ の直和分解：

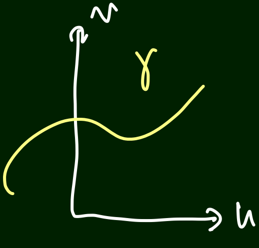
$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = (\text{接成分}) + (\text{法成分})$$

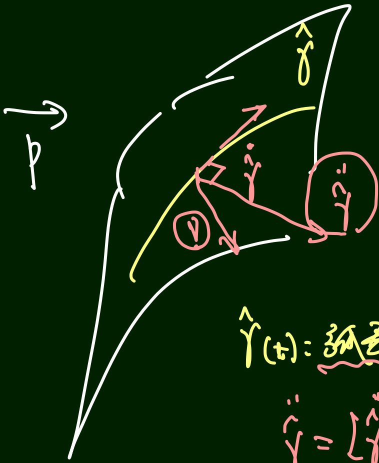
(u. v) をひとつ固定して

注意

$$[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = (\boldsymbol{v} \cdot \nu(u, v))\nu(u, v), \quad [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{v} - [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}.$$

黒板





$$\hat\gamma = p(u, v)$$

$$\dot{\hat\gamma} = \dot u\, p_u + \dot v\, p_v$$

$$|\dot{\hat\gamma}|^2 = \dot u^2 E + 2\dot u \dot v F + \dot v^2 G$$

$\hat\gamma(t)$: 弧長表示

$$\ddot{\hat\gamma} = [\ddot{\hat\gamma}]^T + [\ddot{\hat\gamma}]^N$$

曲線の法曲率

- $p(u,v)$: 正則曲面；ν: 単位法線ベクトル場
- $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$: 平面曲線
- $\hat\gamma(t) = p\circ\gamma(t)$: 曲面上の曲線
- $\boxed{\text{仮定}}$ t は $\hat\gamma(t)$ の弧長パラメータ： $|\dot{\hat\gamma}| = 1$

① $\boxed{E(\dot u)^2 + 2F\dot u\dot v + G(\dot v)^2 = 1}$

定義

$\kappa_n(t) := \ddot{\hat\gamma}(t)\cdot\nu\circ\gamma(t)$: 法曲率 $\quad [\ddot{\hat\gamma}]^N = \kappa_n\nu$

P

補題

② $\kappa_n = L(\dot u)^2 + 2M\dot u\dot v + N(\dot v^2)$. ただし L, M, N は第二基本量.

$$\nu\cdot\ddot{\hat\gamma} = (\dot u p_u + \dot v p_v)' = \cancel{\ddot u p_u} + \cancel{\ddot v p_v} + \dot u^2 p_{uu} + 2\dot u\dot v p_{uv} + \dot v^2 p_{vv}$$

$L \quad M \quad N$

方向の法曲率

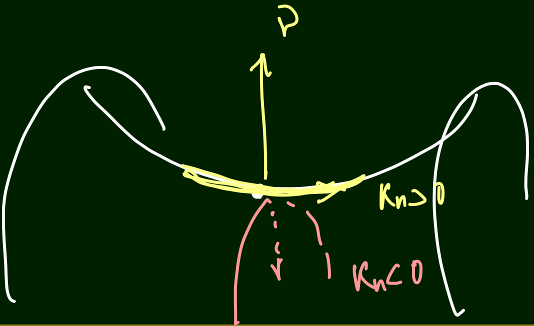
1点固定

- $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$：平面ベクトル，$E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1$. ①
- $\kappa_n(\boldsymbol{v}) := L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$. ②

$\alpha p_u + \beta p_v$ 方向の曲率の決め方

命題

ベクトル $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$ が $E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1$ を満たしながら動くとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$ の最大・最小値は主曲率.



黒板

$E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2-1=0$ の下

$\kappa_n = L\alpha^2+2M\alpha\beta+N\beta^2$ の最大, 最小?

Lagrange の未定乗数法

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

「最大, 最小」

umbilic pt (2つの主曲率一致)

⇒ ある接ベクトル同士の法曲率が同じ値

Gauss 枠

lin indep

- $p(u, v)$: 正則曲面；ν: 単位法線ベクトル場. $\mathcal{F}(u,v)$ 3×3 正則行列
- $\mathcal{F}(u, v) := (p_u(u, v), p_v(u, v), \nu(u, v))$ を Gauss 枠という.
- L, M, N: 第二基本量；$A = (A_i^j)$: 行列

定理 (定理 4.7) (p_{uu}, p_{vu}, ν_u)

正則曲面 $p(u, v)$ の Gauss 枠 $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ は次を満たす：

Weingarten の公式

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$

$$\Omega := \begin{array}{c} p_u \\ p_v \\ \nu \end{array}\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

$p_{uu} \cdot \nu$

$(A = (A_i^j)_{i,j=1,2}$ は Weingarten 行列, Γ_{ij}^k は Chrstoffel 記号).

Christoffel 記号

正則曲面 $p(u,v)$ に対して

$$[p_{uu}]^{\mathrm{T}} = \Gamma^1_{11} p_u + \Gamma^2_{11} p_v,$$
$$[p_{uv}]^{\mathrm{T}} = \Gamma^1_{12} p_u + \Gamma^2_{12} p_v = \Gamma^1_{21} p_u + \Gamma^2_{21} p_v,$$
$$[p_{vv}]^{\mathrm{T}} = \Gamma^1_{22} p_u + \Gamma^2_{22} p_v$$

を満たす (u,v) の関数 Γ^k_{ij} が存在する. Christoffel 記号

命題 (命題 4.5)

Christoffel 記号は第一基本量で表される.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2\Delta}(GE_u - 2FF_u + FE_v),$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2\Delta}(GE_v - FG_u),$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2\Delta}(2GF_v - GG_u - FG_v),$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2\Delta}(-FE_u + 2EF_u - EE_v),$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2\Delta}(-FE_v + EG_u),$$
$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2\Delta}(-2FF_v + FG_u + EG_v).$$

E, F, G

$\Delta = EG - F^2$

黒板

$$p_{uu} = \Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v + L\nu \qquad (\nu \cdot p_{uu} = L)$$

$$p_{uu} \cdot p_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$

$$p_{uu} \cdot p_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$$

$$p_{uu} \cdot p_u = \frac{1}{2}(p_u \cdot p_u)_u = \frac{1}{2} E_u$$

$$p_{uu} \cdot p_v = (p_u \cdot p_v)_u - p_u \cdot p_{uv}$$

$$= F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}$$

etc

Gauss-Weingarte n の方程式 公式

偏微分方程式

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$

$$\Omega := \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

命題

$\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$ し、

黒板

$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$

正則

$\mathcal{F}_{uv} = (\mathcal{F}\Omega)_v = \mathcal{F}_v\Omega + \mathcal{F}\Omega_v = \mathcal{F}(\Lambda\Omega + \Omega_v)$

$\shortparallel$

$\mathcal{F}_{vu} = (\mathcal{F}\Lambda)_u = \mathcal{F}_u\Lambda + \mathcal{F}\Lambda_u = \mathcal{F}(\Omega\Lambda + \Lambda_u)$

$$\boxed{\Lambda\Omega + \Omega_v = \Omega\Lambda + \Lambda_u}$$

積分可能条件

適合条件

compatibility condition

問題 4-1

問題

曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場を $\nu(u,v)$ とする．曲面の第一基本形式，第二基本形式が $ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2$, $II = 2\sin\theta\, du\, dv$ と書けているとき，Gauss 方程式，Weingarten 方程式の適合条件を θ を用いて表しなさい．ただし $\theta = \theta(u,v)$ は区間 $(0,\pi)$ に値をとる C^∞-級関数．

問題 4-2

問題

領域 $U = \{(u, v)\,;\, v > 0\}$ で定義された正則曲面
$p(u, v) := (\cos u \operatorname{sech} v, \sin u \operatorname{sech} v, v - \tanh v)$ を考える．定数 a
(> 1) に対して，U 上の曲線 $u^2 + \cosh^2 v = a^2$ を
$\gamma(t) := (u(t), v(t))$（$\dot{u} > 0$, $\dot{} = d/dt$） と表示し，$\hat{\gamma}(t) = p \circ \gamma(t)$
とする．

1. t が $\hat{\gamma}(t)$ の弧長パラメータとなっているとき，$\dot{u} = \frac{1}{a}\cosh^2 v$,
   $\dot{v} = -\frac{u}{a}\operatorname{cotanh} v$ が成り立つことを示しなさい．
2. 曲面上の曲線 $\hat{\gamma}$ の法曲率を κ_n, 空間曲線としての曲率を κ
   とするとき，$|\kappa_n/\kappa|$ を求めなさい．

今回の課題の提出締切は

$\boxed{\text{2021年1月2日（土）23:59 JST}}$

良いお年をお迎えください