幾何学概論第二 (MTH.B212)

5: 曲面論の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021 年 01 月 07 日

目標

- U:$\mathbb{R}^2$ の領域 U
- E, F, G: U 上の C^∞-級関数で $EG - F^2 > 0$，E,$G > 0$．
- L, M, N: U 上の C^∞-級関数.
- Γ_{ij}^k: E, F, G から命題 4.5 で定義．
- $A := \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$
- Ω, Λ: $U \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$: 式 (5.3)

事実 (曲面論の基本定理，テキスト定理 16.2；証明は付録 B-9)

領域 U が単連結であるとき，Ω, Λ が適合条件を満たすならば，第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ
$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$
となるような正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ の合同変換をのぞいてただ一つ存在する．

単連結領域

$U \subset \mathbb{R}^2$: **領域**

- **の** $\mathrm{P} \in U$ **を起点とするループ：連続写像** $c\colon [0,1] \to U$ **で** $c(0) = c(1)$ **を満たすもの．**

点 P **を起点とする** U **のループが可縮** $\Leftarrow$ **連続写像** $C\colon [0,1] \times [0,1] \to U$ **で** $C(0,t) = c(t)$, $C(1,t) = \mathrm{P}$ **となるものが存在することである．**

定義

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ **が単連結** simply connected **とは，**U **のすべてのループが可縮となることである．**

線型偏微分方程式系の可積分条件

- $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$：実数を成分とする n 次正方行列全体．
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$：正則行列全体．

命題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像 $\mathcal{F}\colon U \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ が $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$ (Ω, $\Lambda\colon U \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) を満たすならば，次が成り立つ：

$$\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega. \tag{1}$$

線型微分偏方程式の可積分条件

事実 (テキスト，定理 B-9.4)

単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ **で定義された** C^∞-**写像** $\Omega,\ \Lambda\colon U \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ **が** (1) **を満たすならば，任意の** $\mathrm{P} \in U$ **と** $\mathcal{F}_0 \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ **に対して，** C^∞-**級写像** $\mathcal{F}\colon U \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ **で** $\mathcal{F}(\mathrm{P}) = \mathcal{F}_0$ **かつ**

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda \tag{2}$$

を満たすものが唯一つ存在する．式 (1) **を** (2) **の適合条件・可積分条件という．**

例

Poincaré の補題

例

単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 α, β が $\alpha_v = \beta_u$ を満たすならば，C^∞-級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ で $df = \alpha\,du + \beta\,dv$ となるものが，定数の差をのぞいてただ一つ存在する．

例 (共役な調和関数)

単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された調和関数 ξ に対して U 上の調和関数 η で $\eta_u = -\xi_v$, $\eta_v = \xi_u$ となるものが定数の差をのぞいて唯一つ存在する. η を ξ に共役な調和関数という.

Gauss-Codazzi の方程式

$$
\begin{cases}
\mathcal{F}_u &= \mathcal{F}\Omega \\
\mathcal{F}_v &= \mathcal{F}\Lambda,
\end{cases}
\qquad
\Omega := \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix},
\quad
\Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.
$$

- Ω, Λ：**第一，第二基本量から定まる行列値関数．**
- **可積分条件** $\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$．
- Gauss **の方程式（**Gauss **の驚異の定理）**

$$
\begin{aligned}
K = {} & \frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + {G_u}^2)}{4(EG-F^2)^2} \\
& + \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} \\
& + \frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + {E_v}^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)}
\end{aligned}
$$

応用

事実

正確な地図は存在しない．

曲面論の基本定理

事実 (曲面論の基本定理，テキスト定理 16.2；証明:付録 B-9)

領域 U が単連結であるとき，Ω, Λ が適合条件を満たすならば，第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ
$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$
となるような正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ の合同変換をのぞいてただ一つ存在する．

問題 5-1

問題

$\mathbb{R}^2$ **の領域** $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,;\,u \leqq 0\}$ **上の関数**
$\xi(u,v) = \log\sqrt{u^2+v^2}$ **は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい．**

問題 5-2

問題

$\mathbb{R}^2$ **の領域** U **で定義された** C^∞-**級関数** σ **に対して，**

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき，曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N **を用いて表しなさい．**

問題 5-3

問題

曲面 p の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $II = 2M\,du\,dv$ と表されているとする．さらに Gauss 曲率が負の定数であるとき，E は u のみの関数，G は v のみの関数であることを示しなさい．