2021 年 01 月 07 日 (2021 年 1 月 21 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 5

■お知らせ

- あけましておめでとうございます．本日は定期試験（1 月 28 日）の予告をします．
- 前回の課題は 27 件の提出がありました．1 名，ファイル不良の方がいらっしゃいました．
- 来週，1 月 14 日は月曜日の時間割の日です．したがって，次回は 1 月 21 日，これが最終回の講義となります．
- 今回の提出物の締切は 2021 年 1 月 16 日（土曜日）23:59 JST とします．

■前回までの訂正

- 講義 web ページの 12 月 24 日映写資料 3 のリンクが 12 月 17 日のものになっていました．
- 提出用紙の提出期限：1 月 7 日 ⇒ 1 月 2 日
- 映写資料 2, 5 ページ，“(弧長) =” の式の 1 行目：$|\hat{\ }(\dot{t})$ ⇒ $|\dot{\hat{\gamma}}(t)|$
- 映写資料 2, 5 ページ，“(弧長) =” の式の 1 行目：$\tanh^2 \dot{v}^2$ ⇒ $\tanh^2 v\, \dot{v}^2$
- 映写資料 2, 6 ページ，問題の 2 行目：L_a ⇒ L_b
- 映写資料 2, 7 ページ，問題の後の箇条書きの第 1 項：$(b, \cosh^{-1}\sqrt{a^2-b^2})$ ⇒ $\bigl(b, \cosh^{-1}\sqrt{a^2-b^2}\bigr)$
- 映写資料 2, 7 ページ，問題の後の箇条書きの第 2 項：$\boldsymbol{v} := p_u - u \operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v$ ⇒ $(\boldsymbol{v} := p_u - u \operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v\, p_v)$
- 映写資料 2, 7 ページ，下から 4 行目：$a^2 \operatorname{sech}^4 p_v$ ⇒ $a^2 \operatorname{sech}^4 v$
- 映写資料 2, 11 ページ，下から 2 行目：$\cos^{-1}\frac{b}{a_1} - \cos^{-1}\frac{b}{a_2}$ ⇒ $\cos^{-1}\frac{b}{a_2} - \cos^{-1}\frac{b}{a_1}$
- 映写資料 2, 11 ページ，最下行：$2\pi - \cos^{-1}\frac{b}{a_1} + \cos^{-1}\frac{b}{a_2}$ ⇒ $2\pi - \cos^{-1}\frac{b}{a_2} + \cos^{-1}\frac{b}{a_1}$
- 映写資料 2, 13 ページ，Q の最後の行：特典 ⇒ 特異点
- 映写資料 2, 15 ページ，下から 3 行目：A の固有値（主曲率）⇒ A の固有値（主曲率）でない
- 映写資料 2, 10 ページ，“(面積) =” の式の 1 行目：$\operatorname{sech} v \tanh v\, dA$ ⇒ $\operatorname{sech} v \tanh v\, du\, dv$
- 映写資料 3, 2 ページ，下から 2 行目：Chrstoffel ⇒ Christoffel
- 映写資料 3, 9 ページ，4 行目：等式を縦揃え．
- 映写資料 3, 11 ページ，1 行目：Gauss-Weingarte の方程式 ⇒ Gauss-Weingarten の公式
- 黒板 2, 8 ページの書き込み：$\cos^{-1}\frac{b}{a}$ ⇒ $\cos^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$.
- 講義資料 4, 3 ページ，補題 4.3：$\kappa_n = (\dot{u})^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N(\dot{v}^2)$ ⇒ $\kappa_n = L(\dot{u})^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N(\dot{v})^2$
- 講義資料 4, 3 ページ，補題 4.3 の証明の 1 行目：$\ddot{\hat{\gamma}} ==$ ⇒ $\ddot{\hat{\gamma}} =$
- 講義資料 4, 3 ページ，(4.1) 式の次の行：$\boldsymbol{v} \in (\alpha, \beta)$ ⇒ $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta)$
- 講義資料 4, 3 ページ，命題 4.4 の証明 3 行目：$(\widehat{I} - \lambda \widehat{II}\,)\binom{\alpha}{\beta} = \mathbf{0}$ ⇒ $(\widehat{II} - \lambda \widehat{I}\,)\binom{\alpha}{\beta} = \mathbf{0}$
- 講義資料 4, 3 ページ，下から 3 行目：$dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$ ⇒ $dp(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)$.
- 講義資料 4, 4 ページ，定理 4.7 の上の行：Weingarten 方程式と Gauss 方程式 ⇒ Weingarten の公式と Gauss の公式
- 講義資料 4, 4 ページ，問題 4-1，2 行目：Gauss 方程式，Weingarten 方程式 ⇒ Gauss, Weingarten の公式

■授業に関する御意見

- 問題 4-2 の計算が途中で全然うまくいかなくなってしまい，計算ミスをしていて詰んでいるのか，解法が間違っているか解らないので，しっかり解説を聞いて理解したい． **山田のコメント：** 単純計算なんですけど，なかなか答えが合いませんよね．
- Gauss 枠まわりの計算はわずかなミスで全てが狂うので，次またミスをすると思うとゾッとします． **山田のコメント：** ですね．
- いよいよなんのこっちゃ追いつけなくなってきました... **山田のコメント：** はい...
- 2021 年もよろしくお願いします． **山田のコメント：** こちらこそ

■質問と回答

質問 1： 講義資料 p. 3，命題 4.4 の証明の最後の部分「これが $\kappa_n(\vec{v})$ の値である」（原文ママ：$\vec{v}$ は $\boldsymbol{v}$ のことか？）は次で合ってますでしょうか？ (1) $\binom{\alpha}{\beta}$ が $\widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ の λ- 固有ベクトルなので次が成立する：$\widehat{II}\binom{\alpha}{\beta} = \widehat{I}\lambda\binom{\alpha}{\beta}$. (2) よって $\kappa_n(\vec{v}) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 = (\alpha, \beta)\,\widehat{II}\binom{\alpha}{\beta} = \lambda(\alpha, \beta)\,\widehat{I}\binom{\alpha}{\beta} = \lambda$. **お答え：**はい．

質問 2： 法曲率があるなら接曲率も法曲率と同様に定義できそうですが，講義にもなければ調べてもでてこないのであまり本質とは関係ないんですか．次回にでてくるんでしょうか． **お答え：**「測地的曲率」という．第 6 回で扱う．

質問 3： 今回の問題 4-2 では $|\kappa_n/\kappa| = 1$ となりましたが，$|\kappa_n/\kappa| = 1$ になるときの曲線の特徴は何がありますか？

お答え： 測地線．第 6 回講義で扱う．

質問 4： 空間内の曲線に対して曲率が定義され，一方で同じ曲線だとしても曲面上にのると曲率は曲線とそうでない曲率に分解されます．このとき，この曲線が乗る曲面は任意にとることができますが（曲線と関係ないところではどうなっていてもいいように思えます）この曲率の分解は一意に定まりますか？ **お答え：**曲線がのっている曲面の法線ベクトルが変わると分解が変わる．

質問 5： 定理 4.7 の Ω, Λ 内の $-A_1^2$ と $-A_2^1$ が逆では?

お答え： Weingarten の公式を $\nu_u = -A_1^1 p_u - A_1^2 p_v$, $\nu_v = -A_2^1 p_u - A_2^2 p_v$ と書いているつもりなので，$(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_1^2 \end{pmatrix}$ で正しいと思います.

質問 6： クリストフェル記号の添字にはどのような意味がありますか. **お答え：**(u, v) を (u^1, u^2) と書いて（古来より座標の添字は上に書く習慣がある）u^j に関する微分を下付きの j で書くことにする．たとえば $p_1 = \partial p/\partial u^1$．このとき $[p_{ij}]^{\mathrm{T}} = \sum_k \Gamma_{ij}^k p_k$.

質問 7： $A = (A_i^j)$ の A_i^j は A の (i, j) 成分ですか？ **お答え：**いいえ (j, i) 成分です.

質問 8： Christoffel 記号や Weingarten 行列の添字の上につけたり下につけたりにはなにか規則があるのでしょうか.

お答え： はい，あるのですが，この講義ではあまり深入りしません．“Einstein の規約” などで調べてごらんなさい.

質問 9： Christoffel 記号は 3 階のテンソルですか?

お答え： 3 添字記号ですが，テンソルではありません．テンソルに要求される座標変換にともなう成分の変換則を満たさないからです．「接続」という概念の成分表示なのですが，ここでは深入りしません.

質問 10： $\left[\ddot{\tilde{\gamma}}(t)\right]^{\mathrm{T}} = \big(\ddot{\tilde{\gamma}}(t) \cdot p_u \circ \gamma(t)\big)p_u + \big(\ddot{\tilde{\gamma}}(t) \cdot p_v \circ \gamma(t)\big)p_v$ と表すことはできますか.

お答え： いいえ．一般に (p_u, p_v) は正規直交系をなさないので.

質問 11： 直和分解のスライドで $[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = \big(\boldsymbol{v} \cdot \nu(u, v)\big)\nu(u, v)$ となる理由が分かりません．ν が法線ベクトルなので，右辺は法線向きになってしまわないのですか？ **お答え：**法線方向の成分なので法線向きになっていなければなりませんが.

質問 12： フルネ枠を考えていたときの $\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s)$ の Ω は交代行列だったので，ガウス枠について考えたときにもどこかに対称性のようなものがあるのかどうかと思いましたが，Ω と Λ について，1,2 行，1,2 列の部分が大むね（原文ママ：概ね）似ているという意味で対称性がありそうなだけで，曲線のフルネ枠のと対応するような性質がみつけられませんでした．フルネ枠とガウス枠で似た性質はないのでしょうか.

お答え： 空間曲線の Frenet 枠は正規直交系（行列として直交行列）なので Ω が交代行列になる（業界用語では SO(3) の Lie 環が交代行列全体の集合）が，Gauss 枠 は一般に正規直交系にならないので，交代性は期待できない．(p_u, p_v, ν) に Gram-Schmidt の直交化を施して直交行列の関係式に直せば係数行列は交代行列になる．このことが「適合条件が見かけ上 9 本の等式だが，独立なものは 3 本」ということの理由になっている.

質問 13： 適合条件は何を求める方程式になるのでしょうか．その適合条件を満たすような Gauss 枠を求めるというようになるのでしょうか. **お答え：**いいえ．曲面が存在すれば自動的に適合条件は満たされる．Ω, Λ は ds^2, $I\!I$ の係数で表されるから，曲面の第一基本量，第二基本量の合わせて 6 個の関数は独立ではなく，関係式（適合条件で与えられる）を満たす.

質問 14： 命題 $\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$ を満たさなければ，Gauss 枠 $\mathcal{F} = (p_u, p_v, \nu)$ は C^∞-級ではないので $p(u, v)$ は正則曲面ではないのでしょうか．それとも $\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$ が成り立たない正則曲面があるのでしょうか.

質問 15： 4-1 で適合条件を θ を用いて表しましたが，その適合条件を θ が満たさないとき，その曲面はどうなるのでしょうか？

お答え： そういう曲面は存在しない.

質問 16： 系 4.8 の適合条件について，u, v の C^∞ 級関数を成分とする 3×3 行列 $\Omega = ($略$)$, $\Lambda = ($略$)$ が与えられ，それが適合条件を満たすとき，その Gauss 枠 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$ を満たすような正則曲面をもってくることはできますか.

お答え： 部分的に，はい．まず Ω, Λ は E, F, G, L, M, N という 6 つの関数から決まらなければならず，成分は完全に独立ではありません．その上で，曲面が存在するのはどういうときかを第 5 回（今回）扱います.

質問 17： 曲面上の点における法曲率の最大・最小を求める過程で，（中略）Gauss 曲率，平均曲率と法曲率はどちらが先立って考えれた概念なのでしょうか. **お答え：**なんとなく同時な気がします.

質問 18： Gauss 枠もフルネ枠も行列なのになぜ「枠」というのですか？特別な性質があるのですか？

お答え： 曲面や曲線の各点における $\mathbb{R}^3$ の基底を与えている.

質問 19： 問題 3-1, 2 の解説で，C_a の接ベクトルについて，$\dot{u}p_u + \dot{v}p_v = \dot{u}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} := p_u - u \operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v p_v$ とあるが，ここで定義した $\boldsymbol{v}$ は p_v の v と別のものですか？ **お答え：**はい，太字ですから別のもの．手書きするときも太字を使うこと.

質問 20： 4-2 では $\hat{\gamma}$ の空間曲線としての曲率を求めようとしたところ膨大な計算になってしまい，答えまでたどり着きませんでした．比ならうまく求められるのでしょうか.（それとも計算ミスをしておかしくなっているだけでしょうか）

お答え： たぶんまともに $\ddot{\tilde{\gamma}}$ の計算をするのが最適だと思います.

質問 21： 4-2 の問題で，式が煩雑になってしまって解けなかったのですが，山田先生は煩雑にならないように工夫していることはありますか？それともミスしないように気をつければ煩雑でも問題ないですか？ **お答え：**計算は間違えます．そのときどうやって誤りを見つけるか，試行錯誤してみましょう．今回のケースでは適当な正規直交枠を使うと結構きれいにまとまります.

質問 22： 幾何では多量の計算が出ますが，（特に双曲線関数の積分など）計算力を鍛えるオススメの方法はありますか.

お答え： 数こなす．さまざまな科目のテキスト・講義資料などで「計算するとこうなる」というフレーズがあったら必ず自分でやってみる．答えの正否を判断するために「常識」を身につけるのも大事か.

質問 23： 曲率を第一基本量または第二基本量で表すことはできますか？ chrstoffel 記号は Gauss 枠の等式以外にも使われますか？

お答え： どちらの問いも意味が判別できない．前半でいう「曲率」は何を指す？曲面の曲率は一つではない．第一基本量と第二基本量で曲率を定義したはず．「または」はどういう意味で使っている？どちらか一方のみで（XOR）の意味？後半：使われます.

質問 24： この講義指定の『曲線と曲面』教科書の 3 章以後の内容を扱う講義はありますか？

お答え： 以前，大学院の講義でやってみたことはある.

5 曲面論の基本定理

■単連結領域 領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{P}\in U$ を起点とする**ループ**とは連続写像 $c\colon[0,1]\to U$ で $c(0)=c(1)=\mathrm{P}$ を満たすものである．点 P を起点とする U のループ c が**可縮**であるとは，連続写像 $C\colon[0,1]\times[0,1]\to U$ で $C(0,t)=c(t)$, $C(1,t)=\mathrm{P}$, $C(s,0)=C(s,1)=\mathrm{P}$ となるものが存在することである．

定義 5.1. 領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ が**単連結** simply connected とは，U のすべてのループが可縮となることである．

事実 5.2. 単連結領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上の 2 点 P, Q を結ぶ 2 つの連続な道 $c_j\colon[0,1]\to U$, $c_j(0)=\mathrm{P}$, $c_j(1)=\mathrm{Q}$ $(j=1,2)$ に対して，連続写像 $C\colon[0,1]\times[0,1]\to U$ で $C(0,t)=c_1(t)$, $C(1,t)=c_2(t)$, $C(s,0)=\mathrm{P}$, $C(s,1)=\mathrm{Q}$ を満たすもの[*1]が存在する．

事実 5.3. 事実 5.2 において c_j が C^∞-級なら変形 C も C^∞-級のものをとることができる[*2]．

例 5.4. $\mathbb{R}^2$, $D:=\{(u,v)\,;\,u^2+v^2<1\}$, $H:=\{(u,v)\,;\,v>0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の単連結領域である．一方 $\mathbb{R}^2_*:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$，$A_{a,b}:=\{(u,v)\,;\,a<u^2+v^2<b\}$ $(0<a<b)$ は単連結ではない．

■線型偏微分方程式系の可積分条件 正の整数 n に対して $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ で実数を成分とする n 次正方行列全体の集合を表す．$\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された写像 $\mathcal{F}\colon U\to\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が C^∞-級であるとは，$\mathcal{F}$ の各成分が U 上の関数として C^∞-級となることである．さらに $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\subset\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を正則行列全体からなる集合とする．

命題 5.5. $\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像 $\mathcal{F}\colon U\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ が $\mathcal{F}_u=\mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v=\mathcal{F}\Lambda$ (Ω, $\Lambda\colon U\to\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) を満たすならば，次が成り立つ：

$$\Omega_v-\Lambda_u=\Omega\Lambda-\Lambda\Omega. \tag{5.1}$$

証明： 偏微分の順序交換 $\mathcal{F}_{uv}=\mathcal{F}_{vu}$ と $\mathcal{F}$ の正則性から従う．

事実 5.6 (テキスト，定理 B-9.4)**.** 単連結領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ で定義された C^∞-写像 $\Omega,\Lambda\colon U\to\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が (5.1) を満たすならば，任意の $\mathrm{P}\in U$ と $\mathcal{F}_0\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ に対して，C^∞-級写像 $\mathcal{F}\colon U\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ で $\mathcal{F}(\mathrm{P})=\mathcal{F}_0$ かつ

$$\mathcal{F}_u=\mathcal{F}\Omega,\qquad\mathcal{F}_v=\mathcal{F}\Lambda \tag{5.2}$$

を満たすものが唯一つ存在する．式 (5.1) を (5.2) の**適合条件・可積分条件**という．

例 5.7 (Poincaré の補題)**.** 単連結領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 α,β が $\alpha_v=\beta_u$ を満たすならば，C^∞-級関数 $f\colon U\to\mathbb{R}$ で $df=\alpha\,du+\beta\,dv$ となるものが，定数の差をのぞいてただ一つ存在する．実際，事実 5.6 を $n=1$，$\Omega=\alpha$, $\Lambda=\beta$, $\mathcal{F}_0=a>0$ に対して適用すると，$\mathcal{F}\colon U\to\mathbb{R}_+$ で $\mathcal{F}_u=\mathcal{F}\alpha$, $\mathcal{F}_v=\mathcal{F}\beta$ となるものが存在する．そこで $f:=\log\mathcal{F}$ とおけばこれが求める関数である．

例 5.8 (共役な調和関数)**.** 単連結領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ で定義された調和関数 ξ に対して U 上の調和関数 η で $\eta_u=-\xi_v$, $\eta_v=\xi_u$ となるものが定数の差をのぞいて唯一つ存在する．η を ξ に共役な調和関数という．

2021 年 01 月 07 日 (2021 年 1 月 21 日訂正)

[*1] すなわち c_1 から c_2 への端点を止める連続変形

[*2] Whitney の近似定理 (Theorem 10.16 in J. M. Lee, Introduction to smooth manifolds, Springer, 2013) による．

■Gauss-Codazzi の方程式　第 4 回講義で見たように，正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ のガウス枠 $\mathcal{F} = (p_u, p_v, \nu)$ は，Gauss-Weingarten の公式

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda, \qquad \Omega := \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

を満たす（記号の意味は第 4 回講義資料参照）．とくに Ω, Λ は曲面の第一基本量，第二基本量から定まる行列値関数で，命題 5.5 の適合条件 (5.1) を満たす．これは 9 本の等式からなるが，それらのうち独立なものは 3 本となることを示すことができる（特別な座標系の場合に問題 5-2 で確かめる）．とくにそのうち 1 本は (5.1) の $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2-2)$-成分から来る，Gauss 曲率 $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ を E, F, G とその偏導関数で表す式（テキスト 123 ページ (11.3)）で **Gauss 方程式**または **Gauss の驚異の定理** Theorema Egregium とよばれる．

例 5.9. 正確な地図を描くことはできない．すなわち，球面 S^2 の一部への写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ でその第一基本形式が $ds^2 = du^2 + dv^2$ となるものは存在しない．

Gauss 方程式以外の適合条件の式 2 本のことを **Codazzi 方程式**とよぶ．

■曲面論の基本定理　$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された 3 つの C^∞-級関数 E, F, G が $EG - F^2 > 0$, E,$G > 0$ を満たしているとする．このとき，Γ_{ij}^k（$i, j, k = 1, 2$）を第 4 回講義資料の命題 4.5 の等式で定義する．

さらに 3 つの C^∞-級関数 L, M, N をとり，

$$A := \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

と定め，これらを用いて $\Omega, \Lambda\colon U \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ を (5.3) のように定義する．

事実 5.10 (曲面論の基本定理，テキスト定理 16.2；証明は付録 B-9)**.** 上の状況で領域 U が単連結であるとき，Ω, Λ が適合条件を満たすならば，第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ となるような正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ の合同変換をのぞいてただ一つ存在する．

問題

5-1 $\mathbb{R}^2$ の領域 $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0)\,;\, u \leqq 0\}$ 上の関数 $\xi(u, v) = \log\sqrt{u^2 + v^2}$ は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい．

5-2 $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 σ に対して，

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad I\!I := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき，曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N を用いて表しなさい．

5-3 曲面 p の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $I\!I = 2M\,du\,dv$ と表されているとする．さらに Gauss 曲率が負の定数であるとき，E は u のみの関数，G は v のみの関数であることを示しなさい．