幾何学概論第二 (MTH.B212)

4: Gauss の公式 (補足)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021 年 01 月 07 日

問題 4-1

問題

曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場を $\nu(u,v)$ とする．曲面の第一基本形式，第二基本形式が

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2, \qquad II = 2\sin\theta\, du\, dv$$

と書けているとき，Gauss，Weingarten の公式の適合条件を θ を用いて表しなさい．

$\theta = \theta(u,v)$：区間 $(0,\pi)$ に値をとる C^∞-級関数．

- 漸近 Chebyshev 網（問題 2-1，第 3 回講義の映写資料 2 参照）．
- $K = -1$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{II} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

問題 4-1

Christoffel's symbol　$(p_u \ p_v \ \nu)$ $\mathbb{R}^3$の基底

p_u

p_v

$$\begin{cases} p_{uu} &= \Gamma^1_{11} p_u + \Gamma^2_{11} p_v + L\nu, \\ p_{uv} &= \Gamma^1_{12} p_u + \Gamma^2_{12} p_v + M\nu, \\ p_{vv} &= \Gamma^1_{22} p_u + \Gamma^2_{22} p_v + N\nu. \end{cases}$$

(Gauss の公式)

ν

$$\begin{cases} \nu_u &= -A^1_1 p_u - A^2_1 p_v, \\ \nu_v &= -A^1_2 p_u - A^2_2 p_v. \end{cases}$$

(Weingarten の公式)

- Γ^k_{ij}: Christoffel 記号（第一基本量で書ける）
- Weingarten 行列

$$A = \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{I\!I} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix}$$

問題 4-1

Q

1. 定理 4.7 の Ω, Λ 内の $-A^2_1$ と $-A^1_2$ が逆では? いいえ
2. $A = (A^j_i)$ の A^j_i は A の (i,j) 成分ですか？ (j,i) 成分です.
3. クリストフェル記号の添字にはどのような意味がありますか.
4. Christoffel 記号は 3 階のテンソルですか? いいえ

(接続)

- パラメータ (u,v) を (u^1,u^2) と書く. 古来の習慣
- u^j に関する微分を下付きの j で表す：$p_j = p_{u^j}$, $p_{jk} = p_{u^j u^k}$

和

$$[p_{jk}]^{\mathrm{T}} = \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{jk} p_l \qquad \nu_j = -\sum_{l=1}^{2} A^l_j p_l$$

P^k_{ij}

省略 (Einstein の和の規約)

問題 4-1

$E=G=1$, $F=\cos\theta$ から $\underline{\widehat{I}=\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{pmatrix}}$,

$$\begin{aligned}
0&=E_u=(p_u\cdot p_u)_u=2p_u\cdot p_{uu}, & 0&=E_v=2p_u\cdot p_{uv}\\
0&=G_u=(p_v\cdot p_v)_u=2p_u\cdot p_{uv}, & 0&=G_v=2p_v\cdot p_{vv}\\
-\theta_u\sin\theta&=F_u=p_{uu}\cdot p_v+p_u\cdot p_{uv}=p_v\cdot p_{uu}\\
-\theta_v\sin\theta&=F_v=p_{uv}\cdot p_v+p_u\cdot p_{vv}=p_u\cdot p_{vv}.
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}{}^t p_u\\ {}^t p_v\end{pmatrix}(p_{uu},p_{uv},p_{vv})=\begin{pmatrix}p_u\cdot p_{uu} & p_u\cdot p_{uv} & p_u\cdot p_{vv}\\ p_v\cdot p_{uu} & p_v\cdot p_{uv} & p_v\cdot p_{vv}\end{pmatrix}=-\sin\theta\begin{pmatrix}0 & 0 & \theta_v\\ \theta_u & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}{}^t p_u\\ {}^t p_v\end{pmatrix}(p_{uu},p_{uv},p_{vv})&=\begin{pmatrix}{}^t p_u\\ {}^t p_v\end{pmatrix}\left([p_{uu}]^{\mathrm{T}},[p_{uv}]^{\mathrm{T}},[p_{vv}]^{\mathrm{T}}\right)\\
&=\begin{pmatrix}{}^t p_u\\ {}^t p_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2\end{pmatrix}=\widehat{I}\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2\end{pmatrix}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\begin{pmatrix}1 & -\cos\theta\\ -\cos\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \theta_v\\ \theta_u & 0 & 0\end{pmatrix}$$

問題 4-1

$$
\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -\csc\theta & \cot\theta \\ \cot\theta & -\csc\theta \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_v \\ \theta_u & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \theta_u \cot\theta & 0 & -\theta_v \csc\theta \\ -\theta_u \csc\theta & 0 & \theta_v \cot\theta \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}
= \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{II}
= \begin{pmatrix} \csc\theta & -\cot\theta \\ -\cot\theta & \csc\theta \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -\cot\theta & \csc\theta \\ \csc\theta & -\cot\theta \end{pmatrix}
$$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$\mathrm{cosec}\,\theta = \csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

問題 4-1

- Gauss 枠：$\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu) \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}_u &= \mathcal{F}\Omega \\ \mathcal{F}_v &= \mathcal{F}\Lambda. \end{cases}$

E, F, G　L, M, N　u

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_u \cot\theta & 0 & \cot\theta \\ -\theta_v \csc\theta & 0 & -\csc\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_v \csc\theta & -\csc\theta \\ 0 & \theta_v \cot\theta & \cot\theta \\ \sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 適合条件（可積分条件）：$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O.$

$$\begin{pmatrix} \theta_{uv}\cot\theta - \cos\theta & \theta_{uv}\csc\theta - 1 & 0 \\ -\theta_{uv}\csc\theta + 1 & -\theta_{uv}\cot\theta + \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

問題 4-1

Q

フルネ枠を考えていたときの $\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s)$ の Ω は交代行列だったので，ガウス枠について考えたときにもどこかに対称性のようなものがあるのかどうかと思いましたが，...

A

Gauss 枠は直交行列でない．

(p_u, p_v, ν)

直交行列

$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}' : \text{交代}}$

問題 4-1

- 適合条件

$$
\begin{pmatrix}
\theta_{uv}\cot\theta-\cos\theta & \theta_{uv}\csc\theta-1 & 0\\
-\theta_{uv}\csc\theta+1 & -\theta_{uv}\cot\theta+\cos\theta & 0\\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
=\underline{\underline{(\theta_{uv}-\sin\theta)}}\begin{pmatrix}
\cot\theta & \csc\theta & 0\\
-\csc\theta & -\cot\theta & 0\\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}=O.
$$

可積分系

$\boxed{\theta_{uv}=\sin\theta}$: Sine-Grodon 方程式

Gordon

$$\theta_{tt}-\theta_{xx}=\sin\theta$$

$$u=(t+x)/2$$
$$v=(t-x)/2$$

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}=\lambda\varphi$$

Klein Gordon.

問題 4-1

Q

適合条件は何を求める方程式になるのでしょうか.

A

曲面が存在すれば自動的に適合条件は満たされる.

Q

適合条件を満たさないとき，その曲面はどうなるのでしょうか？

A

そういう曲面は存在しない.

Q

適合条件を満たすとき，その Gauss 枠 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$ を満たすような正則曲面をもってくることはできますか．今回

問題 4-2

問題

擬球面

領域 $U=\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された正則曲面 $p(u,v):=(\cos u\,\mathrm{sech}\,v,\sin u\,\mathrm{sech}\,v,v-\tanh v)$ を考える．定数 a (>1) に対して，U 上の曲線 $\boxed{u^2+\cosh^2 v=a^2}$ を $\gamma(t):=(u(t),v(t))$（$\dot u>0$，$\dot{}=d/dt$）と表示し，$\hat\gamma(t)=p\circ\gamma(t)$ とする．

1. t が $\hat\gamma(t)$ の弧長パラメータとなっているとき，$\dot u=\frac{1}{a}\cosh^2 v$, $\dot v=-\frac{u}{a}\,\mathrm{cotanh}\,v$ が成り立つことを示しなさい．
2. 曲面上の曲線 $\hat\gamma$ の法曲率を κ_n，空間曲線としての曲率を κ とするとき，$|\kappa_n/\kappa|$ を求めなさい．

- 擬球面：問題 1-1 の $b=0$ の場合．

$u\dot{u} + \dot{v}\cosh v\sinh v = 0$

問題

$ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$, $II = -\operatorname{sech} v \tanh v(du^2 - dv^2)$.
定数 $a\ (>1)$ に対して，U 上の曲線 $u^2 + \cosh^2 v = a^2$ を
$\gamma(t) := (u(t), v(t))\ (\dot{u} > 0,\ \dot{} = d/dt)$ と表示し，$\hat{\gamma}(t) = p \circ \gamma(t)$.

$\dot{v} = -\dfrac{u\dot{u}}{\cosh v \sinh v}$

$\cosh^2 v + u^2 = a^2$

1. t が $\hat{\gamma}(t)$ の弧長パラメータとなっているとき，$\boxed{\dot{u} = \frac{1}{a}\cosh^2 v}$，$\dot{v} = -\frac{u}{a}\operatorname{cotanh} v$ が成り立つことを示しなさい．

$\hat{\gamma}(t) = p(u(t), v(t))$

$|\hat{\gamma}(t)|^2 = |\dot{u} p_u + \dot{v} p_v|^2$

$\dot{u}^2 \underbrace{p_u \cdot p_u}_{E} + \cancel{2\dot{u}\dot{v}\, \underbrace{p_u \cdot p_v}_{F}} + \dot{v}^2 \underbrace{p_v \cdot p_v}_{G}$

$\dot{u}^2 \operatorname{sech}^2 v + \dot{v}^2 \tanh^2 v$

$\ddot{u} = \frac{2}{a}\cosh v \sinh v\, \dot{v}$

$$\boxed{\ddot{u} = -\frac{2u}{a}\cosh^2 v,}\qquad \ddot{v} = -\frac{1}{a^2}\cosh v \operatorname{csch}^2 v(\cosh^2 v \sinh^2 v + u^2)$$

$\coth v$

問題

加速度が曲面の法方向

$ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$, $II = -\operatorname{sech} v \tanh v (du^2 - dv^2)$.
定数 a (> 1) に対して，U 上の曲線 $u^2 + \cosh^2 v = a^2$ を $\gamma(t) := (u(t), v(t))$（$\dot u > 0$, $\dot{} = d/dt$） と表示し，$\hat\gamma(t) = p \circ \gamma(t)$.

2. 曲面上の曲線 $\hat\gamma$ の法曲率を κ_n, 空間曲線としての曲率を κ とするとき，$|\kappa_n/\kappa|$ を求めなさい．

$\kappa = |\ddot{\hat\gamma}|$

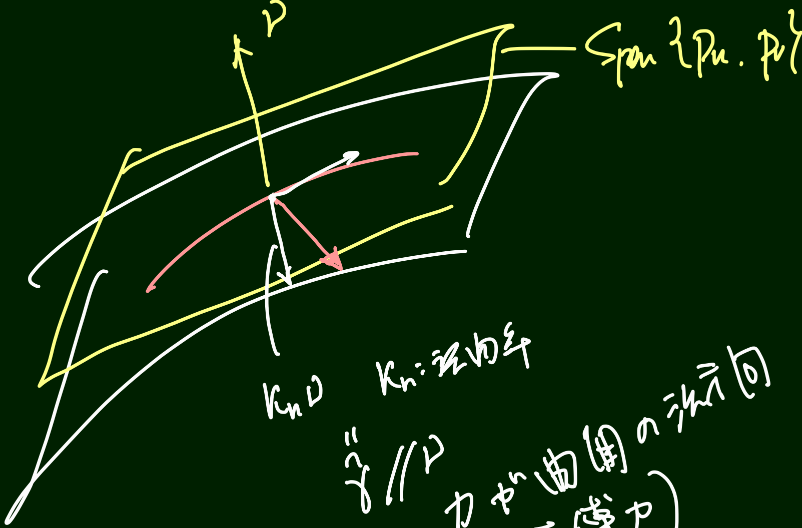
$\dot{\hat\gamma} = \dot u p_u + \dot v p_v$

$\ddot{\hat\gamma} = \ddot u p_u + \ddot v p_v + \dot u(\dot u p_{uu} + \dot v p_{uv}) + \dot v(\dot u p_{uv} + \dot v p_{vv})$

$$\ddot{\hat\gamma} = (\ddot u + \Gamma^1_{11}\dot u^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot u \dot v + \Gamma^1_{22}\dot v^2) p_u + (\ddot v + \Gamma^2_{11}\dot u^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot u \dot v + \Gamma^2_{22}\dot v^2) p_v + (*)\nu = (*)\nu = \kappa_n \nu.$$

$$\Rightarrow |\kappa_n| = |\ddot{\hat\gamma}| = |\kappa|.$$

黒板



κ_n: 法曲率

$\gamma'' /\!/ \nu$

力が曲面の法方向

(束縛力)

問題 4-2

Q

法曲率があるなら接曲率も法曲率と同様に定義できそうですが，講義にもなければ調べてもでてこないのであまり本質とは関係ないんですか．次回にでてくるんでしょうか．

A

「測地的曲率」という．第 6 回で扱う．

Q

今回の問題 4-2 では $|\kappa_n/\kappa| = 1$ となりましたが，$|\kappa_n/\kappa| = 1$ になるときの曲線の特徴は何がありますか？

A

測地線．第 6 回講義で扱う．

直線

問題 4-2

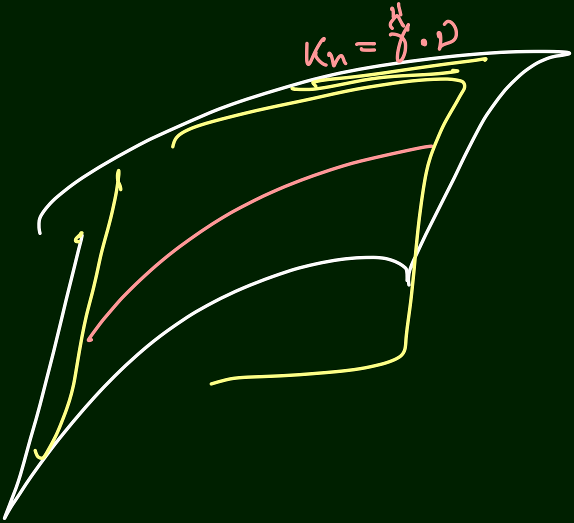
Q

空間内の曲線に対して曲率が定義され，一方で同じ曲線だとしても曲面上にのると曲率は曲線とそうでない曲率に分解されます．このとき，この曲線が乗る曲面は任意にとることができますが（曲線と関係ないところではどうなっていてもいいように思えます）この曲率の分解は一意に定まりますか？

A

曲線がのっている曲面の法線ベクトルが変わると分解が変わる．

黒板



黒板