幾何学概論第二 (MTH.B212)

5: 曲面論の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021 年 01 月 07 日

目標

- U:$\mathbb{R}^2$ の領域
- E, F, G: U 上の C^∞-級関数で $EG - F^2 > 0$, E,$G > 0$.
- L, M, N: U 上の C^∞-級関数.
- Γ_{ij}^k: E, F, G から命題 4.5 で定義.
- $A := \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

$g_{uv} = g_{vu}$

- Ω, Λ : $U \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$: 式 (5.3)

事実 (曲面論の基本定理，テキスト定理 16.2；証明は付録 B-9)

領域 U が単連結であるとき，Ω, Λ が適合条件を満たすならば，第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ
$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$
となるような正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ の合同変換をのぞいてただ一つ存在する.

単連結領域

$U \subset \mathbb{R}^2$: 領域

$= \mathrm{P}$

- ~~※~~ $\mathrm{P} \in U$ を起点とするループ：連続写像 $c\colon [0,1] \to U$ で $c(0) = c(1)$ を満たすもの.

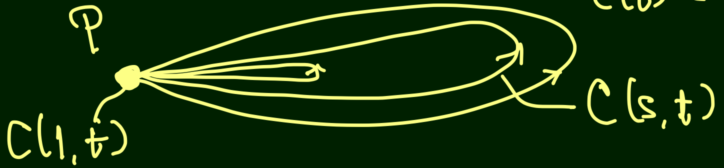
点 P を起点とする U のループが可縮 $\Leftrightarrow$ 連続写像 $C\colon [0,1] \times [0,1] \to U$ で $C(0,t) = c(t)$, $C(1,t) = \mathrm{P}$ となるものが存在することである.

$C(s,0) = C(s,1) = \mathrm{P}$

定義

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ が単連結 simply connected とは, U のすべてのループが可縮となることである.

$c(t) = C(0,t)$



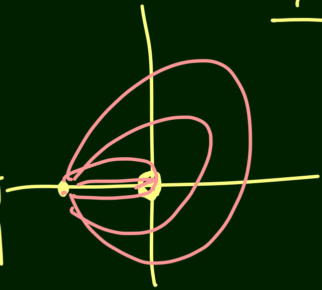
$\mathbb{R}^2$ simply connected

$D := \{(u,v) \mid u^2+v^2<1\}$ simp. conn.

$H := \{(u,v) \mid v>0\}$ 〃

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

non-simply connected



線型偏微分方程式系の可積分条件

open

- $M_n(\mathbb{R})$：実数を成分とする n 次正方行列全体. $\cong \mathbb{R}^{n^2}$
- $GL(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$：正則行列全体.

general linear

$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \mid \det A \neq 0\}$

$= \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

命題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像 $\mathcal{F}\colon U \to GL(n,\mathbb{R})$ が $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$ $(\Omega,\ \Lambda\colon U \to M_n(\mathbb{R}))$ を満たすならば，次が成り立つ：

$\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega.} \tag{1}$$

可積分条件 or 適合条件

線型微分偏方程式の可積分条件

事実 (テキスト，定理 B-9.4)

given

単連結領域 $U\subset\mathbb{R}^2$ で定義された C^∞-写像 $\Omega, \Lambda\colon U\to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が (1) を満たすならば，任意の $\mathrm{P}\in U$ と $\mathcal{F}_0\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ に対して，C^∞-級写像 $\mathcal{F}\colon U\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ で $\mathcal{F}(\mathrm{P})=\mathcal{F}_0$ かつ

$$\boxed{\mathcal{F}_u=\mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}_v=\mathcal{F}\Lambda} \tag{2}$$

を満たすものが唯一つ存在する．式 (1) を (2) の適合条件・可積分条件という．

例

Poincaré の補題

例

単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 α, β が $\boxed{\alpha_v = \beta_u}$ を満たすならば，C^∞-級関数 $f \colon U \to \mathbb{R}$ で $df = \alpha\,du + \beta\,dv$ となるものが，定数の差をのぞいてただ一つ存在する．

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\alpha \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\beta \end{cases}$$

スカラー値 $(n=1)$

$\alpha = f_u, \ \beta = f_v$

積分可能条件：$\alpha_v - \beta_u = \cancel{\alpha\beta - \beta\alpha}$ 0

解ける． $\mathcal{F}(P) = a > 0 \Rightarrow \mathcal{F} > 0$

∘ $f := \log \mathcal{F}$ 　 $f_u = \dfrac{\mathcal{F}_u}{\mathcal{F}} = \alpha$ 　 $f_v = \beta$

例 (共役な調和関数)

Cauchy – Riemann

単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された調和関数 ξ に対して U 上の調和関数 η で $\eta_u = -\xi_v$, $\eta_v = \xi_u$ となるものが定数の差をのぞいて唯一つ存在する. η を ξ に共役な調和関数という.

$$\begin{cases} \eta_u = -\xi_v = \alpha \\ \eta_v = \xi_u = \beta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Poincaré の補題より

ヨク □

$\alpha_v = -\xi_{vv}$

$\beta_u = \xi_{uu}$

$\alpha_v - \beta_u$

$= -\Delta\xi = 0$

Gauss-Codazzi の方程式

Gauss-Weingarten

E F G

L M N

$$
\begin{cases}
\mathcal{F}_u &= \mathcal{F}\Omega \\
\mathcal{F}_v &= \mathcal{F}\Lambda,
\end{cases}
\qquad
\Omega := \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & -A^1_1 \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & -A^2_1 \\ L & M & 0 \end{pmatrix},
\quad
\Lambda := \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} & -A^1_2 \\ \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} & -A^2_2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.
$$

- Ω, Λ：第一，第二基本量から定まる行列値関数.
- 3本 可積分条件 $\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$. 9本 ← 曲面があったら これが成立
- Gauss の方程式（Gauss の驚異の定理）

$$
\frac{LN-M^2}{EG-F^2} \quad K = \frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u{}^2)}{4(EG-F^2)^2} \quad \boxed{E, F, G}
$$

$$
+ \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2}
$$

$$
+ \frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v{}^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)}
$$

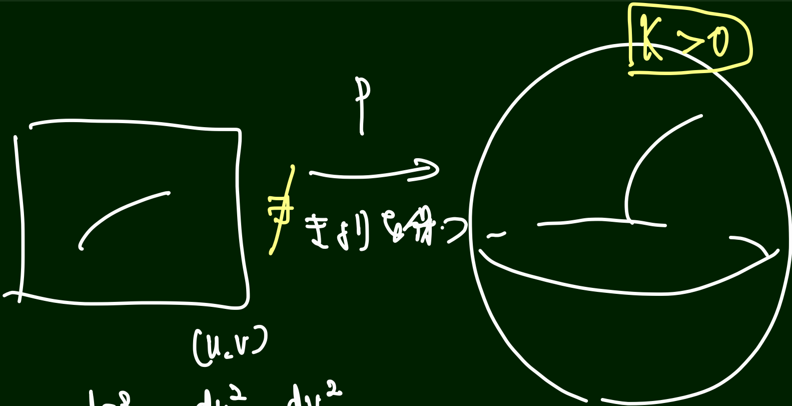
$P_{uuv} = P_{uvu}$

○ P_u ○ P_v ○ ν

応用

事実

正確な地図は存在しない.



$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

$K=0$

曲面論の基本定理

事実 (曲面論の基本定理，テキスト定理 16.2；証明:付録 B-9)

領域 U が単連結であるとき，Ω, Λ が適合条件を満たすならば，第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ 3F
$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$
となるような正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ の合同変換をのぞいてただ一つ存在する．

$K =$ Gauss の方程式

Theorema Egregium

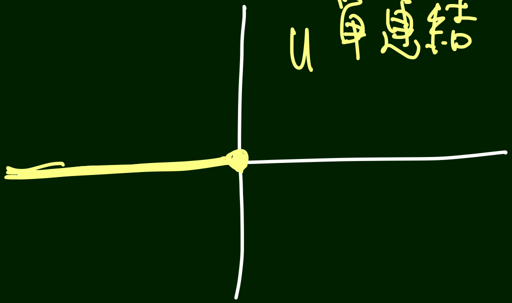
L, M, N のビブン Codazzi 方程式

問題 5-1

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,;\, u \leqq 0\}$ 上の関数 $\xi(u,v) = \log\sqrt{u^2+v^2}$ は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい.

U 単連結



問題 5-2

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 σ に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき, 曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N を用いて表しなさい.

等温座標

Ω, Λ

$$\boxed{\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega}$$

3本

問題 5-3

問題

$L=N=0$

曲面 p の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ
$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, $II = 2M\,du\,dv$ と表されている
とする．さらに Gauss 曲率が負の定数であるとき，E は u のみ
の関数，G は v のみの関数であることを示しなさい．

$\underline{K<0,\ \mathrm{const}} \Rightarrow \begin{array}{l} E = E(u) \\ G = G(v) \end{array}$

$☆\ \boxed{E_v = 0 \qquad G_u = 0} \Leftarrow$ Codazzi

今回の課題の提出締切は

$\boxed{\text{2021年1月16日（土）23:59 JST}}$

次回，21日にお会いしましょう