

# 幾何学概論第二 (MTH.B212)

5: 曲面論の基本定理 (補足)

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

[www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/)

東京工業大学理学院数学系

2021 年 01 月 21 日

## 問題 5-1

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0); u \leq 0\}$  上の関数

$\xi(u, v) = \log \sqrt{u^2 + v^2}$  は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい．

### 定理 (例 5.8)

単連結領域  $U \subset \mathbb{R}^2$  で定義された調和関数  $\xi$  に対して  $U$  上の調和関数  $\eta$  で

$$\begin{cases} \eta_u &= -\xi_v \\ \eta_v &= \xi_u \end{cases}$$

となるものが定数の差をのぞいて唯一つ存在する．  
 $\eta$  を  $\xi$  に共役な調和関数という．

## 問題 5-1

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0); u \leq 0\}$  上の関数

$\xi(u, v) = \log \sqrt{u^2 + v^2}$  は調和関数であることを確かめ、その共役な調和関数を求めなさい。

$$\xi_u = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \xi_v = \frac{v}{u^2 + v^2}$$
$$\Delta \xi = \xi_{uu} + \xi_{vv} = \frac{-u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} = 0$$

求めたいのは次を満たす関数  $\eta$ :

$$\begin{cases} \eta_u &= \frac{-v}{u^2 + v^2}, \\ \eta_v &= \frac{u}{u^2 + v^2}. \end{cases}$$

## 問題 5-1

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0); u \leq 0\}$  上の関数

$\xi(u, v) = \log \sqrt{u^2 + v^2}$  は調和関数であることを確かめ, その共役な調和関数を求めなさい.

解きたい微分方程式:

$$\begin{cases} \eta_u &= \frac{-v}{u^2 + v^2} = \frac{-\frac{v}{u^2}}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} \left(\frac{v}{u}\right)_u \\ \eta_v &= \frac{u}{u^2 + v^2} = \frac{\frac{1}{u}}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} \left(\frac{v}{u}\right)_v \end{cases}$$

$$\boxed{\eta = \tan^{-1} \frac{v}{u} + (\text{constant})}$$

## 問題 5-1

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0); u \leq 0\}$  上の関数

$\xi(u, v) = \log \sqrt{u^2 + v^2}$  は調和関数であることを確かめ, その共役な調和関数を求めなさい.

$$\eta = \tan^{-1} \frac{v}{u} + (\text{constant})$$

▶  $u = 0$  で定義されない.

## 問題 5-1

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0); u \leq 0\}$  上の関数

$\xi(u, v) = \log \sqrt{u^2 + v^2}$  は調和関数であることを確かめ, その共役な調和関数を求めなさい.

$$\eta(u, v) := \begin{cases} \tan^{-1} \frac{v}{u} & \text{on } U_1 := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > 0\}, \\ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{u}{v} & \text{on } U_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v > 0\}, \\ -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{u}{v} & \text{on } U_3 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v < 0\}. \end{cases}$$

- ▶  $U_i \cap U_j$  上ではどの定義でも同じ値をとる.
- ▶  $\eta$  は  $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$  上で  $C^\infty$ -級.

## 問題 5-1

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0); u \leq 0\}$  上の関数

$\xi(u, v) = \log \sqrt{u^2 + v^2}$  は調和関数であることを確かめ, その共役な調和関数を求めなさい.

- ▶  $(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  (極座標) とおくと

$$\eta_r = 0, \quad \eta_\theta = 1.$$

したがって  $\eta = \theta$ .

- ▶  $\xi$  は  $\hat{U} := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  で  $C^\infty$ -級.
- ▶  $\eta$  は  $\hat{U}$  上の  $C^\infty$ -級関数にならない.

## 問題 5-2

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  で定義された  $C^\infty$ -級関数  $\sigma$  に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

とおくとき, 曲面論の基本定理に現れる適合条件を  $\sigma, L, M, N$  を用いて表しなさい.

Gauss 枠  $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$  が満たす方程式  $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$  の適合条件

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$$

を書き下す.



## 問題 5-2

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  で定義された  $C^\infty$ -級関数  $\sigma$  に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

とおくとき, 曲面論の基本定理に現れる適合条件を  $\sigma, L, M, N$  を用いて表しなさい.

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -\sigma_u \\ -\sigma_v & \sigma_u & \sigma_v \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-2\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma} L & e^{-2\sigma} M \\ e^{-2\sigma} M & e^{-2\sigma} N \end{pmatrix}$$

## 問題 5-2

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  で定義された  $C^\infty$ -級関数  $\sigma$  に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

とおくとき, 曲面論の基本定理に現れる適合条件を  $\sigma, L, M, N$  を用いて表しなさい.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}L \\ -\sigma_v & \sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_v & -\sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}N \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

## 問題 5-2

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  で定義された  $C^\infty$ -級関数  $\sigma$  に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

とおくとき, 曲面論の基本定理に現れる適合条件を  $\sigma, L, M, N$  を用いて表しなさい.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}L \\ -\sigma_v & \sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_v & -\sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}N \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

## 問題 5-2

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  で定義された  $C^\infty$ -級関数  $\sigma$  に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

とおくとき, 曲面論の基本定理に現れる適合条件を  $\sigma, L, M, N$  を用いて表しなさい.

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = \begin{pmatrix} 0 & A & -e^{-2\sigma}B \\ -A & 0 & -e^{-2\sigma}C \\ B & C & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \Delta\sigma + e^{-2\sigma}(LN - M^2)$$

$$B = L_v - M_u - \sigma_v(L + N)$$

$$C = M_v - N_u - \sigma_u(L + N)$$

## 問題 5-2

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  で定義された  $C^\infty$ -級関数  $\sigma$  に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

とおくとき, 曲面論の基本定理に現れる適合条件を  $\sigma, L, M, N$  を用いて表しなさい.

適合条件:

$$\Delta\sigma = -e^{-2\sigma}(LN - M^2) = -e^{2\sigma}K \quad (\text{Gauss 方程式})$$

$$L_v - M_u = \sigma_v(L + N) \quad (\text{Codazzi 方程式})$$

$$M_v - N_u = \sigma_u(L + N) \quad (\text{Codazzi 方程式})$$

## 問題 5-2

### 問題

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  で定義された  $C^\infty$ -級関数  $\sigma$  に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

とおくとき, 曲面論の基本定理に現れる適合条件を  $\sigma, L, M, N$  を用いて表しなさい.

$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$ : 等温座標系

## 問題 5-3

### 問題

曲面  $p$  の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad II = 2M du dv$$

と表されているとする．さらに Gauss 曲率が負の定数であるとき， $E$  は  $u$  のみの関数， $G$  は  $v$  のみの関数であることを示しなさい．

- ▶ Codazzi 方程式から  $E_v = G_u = 0$  がでる．
- ▶ 一般形の Codazzi 方程式を知らなくても， $\nu_{uv} = \nu_{vu}$  の接成分を書き下せばよい．

## 問題 5-3

### 問題

曲面  $p$  の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad II = 2M du dv$$

と表されているとする．さらに Gauss 曲率が負の定数であるとき， $E$  は  $u$  のみの関数， $G$  は  $v$  のみの関数であることを示しなさい．

計算のヒント：  $K = -k^2$  ( $k$  は零でない定数) とおくと

- ▶  $E_u = 2p_{uu} \cdot p_u = 2(\Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v) \cdot p_u = 2(E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2) \dots$
- ▶  $M = \frac{k}{\lambda} (\lambda = \sqrt{EG - F^2})$
- ▶  $\lambda_u = \lambda(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)$ ,  $\lambda_v = \lambda(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2)$ .
- ▶  $A = \frac{k}{\lambda} \begin{pmatrix} -F & G \\ E & -F \end{pmatrix}$ .



## 問題 5-3

- ▶  $K < 0$  ならば漸近線座標 (テキスト 234 ページ) すなわち  $L = N = 0$  となるパラメータが存在する (例: 問題 2-2)
- ▶  $K$  が負の定数なら, 漸近線座標における第一基本量は  $E = a(u)^2$ ,  $G = b(v)^2$  という形にかける. ただし  $a, b$  は一変数関数 (問題 5-3):

$$ds^2 = a(u)^2 du^2 + 2F du dv + b(v)^2 dv^2$$

- ▶ 上の状況であたらしい座標系  $(\xi, \eta)$  を

$$\xi := \xi(u) = \int a(u) du, \quad \eta := \eta(v) = \int b(v) dv$$

と定めると, これは漸近線座標で,

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\tilde{F} d\xi d\eta + d\eta^2, \quad II = 2\tilde{M} d\xi d\eta.$$

## 問題 5-3

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\tilde{F} d\xi d\eta + d\eta^2, \quad II = 2\tilde{M} d\xi d\eta.$$

- ▶ とくに Gauss 曲率  $-1$  なら  $\tilde{M} = \sin \theta$ ,  $\tilde{F} = \cos \theta$  と書ける :  
漸近 Chebyshev 網 (問題 2-1)

$$ds^2 = d\xi^2 + 2 \cos \theta d\xi d\eta + d\eta^2, \quad II = 2 \sin \theta d\xi d\eta.$$

- ▶ このとき, 適合条件は (問題 4-1):

$$\theta_{\xi\eta} = \sin \theta \quad (\text{sine-Gordon 方程式})$$

## 事実

Sine-Gordon 方程式の解と Gauss 曲率一定  $-1$  の曲面が  
“1 対 1 対応” する .