幾何学概論第二 (MTH.B212)

6: 測地線

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021 年 01 月 21 日

測地線

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面；$\gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr)$：$U$ 上の曲線；$\hat{\gamma} = p \circ \gamma$

定義

$\hat{\gamma}$ が測地線 a geodesic であるとは，$\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ が成り立つこと．

測地線

命題

測地線 $\hat{\gamma}$ の速度ベクトルの大きさは一定．
（したがって測地線の概念は曲線のパラメータによる．）

例

- 平面上の直線は，弧長パラメータで表示すれば測地線である．
- 球面上の大円（球面と，その中心を通る平面との共通部分）は弧長パラメータで表示すれば測地線である．

測地線

例

正則曲面 $p(u,v) := (\cos u \operatorname{sech} v, \sin u \operatorname{sech} v, v - \tanh v)$ 上の，$u^2 + \cosh^2 v = a^2$ に対応する曲線 $(a > 1)$ は弧長パラメータで表示すると測地線である．

問題 4-2；$|\kappa_n/\kappa| = 1$．

測地線

命題

各 t で $\ddot{\hat{\gamma}}(t)$ が $\{\dot{\hat{\gamma}}(t), \nu \circ \gamma(t)\}$ と一次従属なら，$\hat{\gamma}$ を弧長パラメータ s で表した曲線は測地線．

準測地線

内的な量

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に関する量のうち，第一基本量 E, F, G のみによって表されるものを内的 intrinsic な量という．

- 長さ（弧長）
- 角度
- 面積
- Gauss 曲率
- 測地線

双曲平面

- 擬球面 $p(u,v) = (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v)$ $(v > 0)$
- 第一基本形式：$ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$
- 座標変換：$(\xi, \eta) = (u, \cosh v)$：$ds^2 = \dfrac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}$ $(\eta > 1)$
- 拡張：$ds^2 = \dfrac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}$ $(\eta > 0)$
- $K = e^{-2\sigma}\Delta\sigma = -1$．$(ds^2 = e^{2\sigma}(d\xi^2 + d\eta^2))$（問題 5-2）．
- 測地線：(ξ, η) 平面（$\eta > 0$）上の ξ 軸上に中心をもつ半円．

双曲平面

(U, ds^2)；$U = \{(\xi, \eta)\,;\, \eta > 0\}$；$ds^2 = \frac{1}{\eta^2}(d\xi^2 + d\eta^2)$

- Gauss 曲率 -1
- 測地線は ξ 軸上に中心をもつ半円または ξ 軸に直交する半直線．

事実

双曲平面は，$\mathbb{R}^3$ の曲面として実現できない（D. Hilbert，1901）

Gauss-Bonnet の定理

- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$：U 上の曲線
- $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \mathrm{B}$, $\gamma_2(1) = \gamma_3(0) = \mathrm{C}$, $\gamma_3(1) = \gamma_1(0) = \mathrm{A}$
- これらが囲む領域 $\triangle\mathrm{ABC}$ が閉円板と同相．

Theorem (Gauss-Bonnet の定理，テキスト 定理 10.6)

線分 $\hat{\gamma}_j = p \circ \gamma_j$ $(j = 1, 2, 3)$ が測地線であるとき，

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi + \int_{\triangle\mathrm{ABC}} K\,dA \qquad \left(dA = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv\right).$$

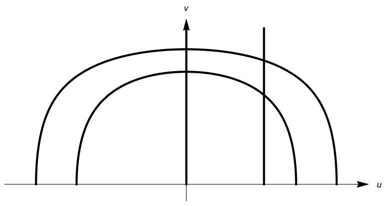
Gauss-Bonnet の定理

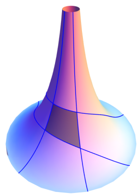
問題 (問題 3-1)

$U = \{(u, v)\,;\, v > 0\}$ で定義された曲面の第一基本形式が $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\,du^2 + \tanh^2 v\,dv^2$ となるとする．U 上の曲線 $u^2 + \cosh^2 v = a^2$（$a > 1$）に対応する曲面上の曲線を C_a，直線 $u = b$（$b \in \mathbb{R}$）に対応する曲面上の曲線を L_b とするとき，

1. C_a の長さを求めなさい．
2. C_a と L_b の交点 P における交角を求めなさい．
3. $\overline{\Omega} := \{(u, v) \in U\,;\, a_1^2 \leqq u^2 + \cosh^2 v \leqq a_2^2, 0 \leqq u \leqq b\}$ に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい．ただし a_1, a_2, b は $1 < a_1 < a_2$, $0 < b < \sqrt{a_1^2 - 1}$ を満たす定数である．

問題 3-1





$$(\text{面積}) = \cos^{-1}\frac{b}{a_2} - \cos^{-1}\frac{b}{a_1}$$

$$(\text{内角の和}) = 2\pi - \cos^{-1}\frac{b}{a_2} + \cos^{-1}\frac{b}{a_1}.$$

大域的な Gauss-Bonnet の定理

定理 (大域的な Gauss-Bonnet の定理（テキスト定理 10.7））

コンパクトで向き付けられた 2 次元多様体 S 上で定義された大域的な正則曲面 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$ に対して

$$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$$

が成り立つ．ただし K, dA はそれぞれ曲面の Gauss 曲率，面積要素，$\chi(S)$ は S の Euler 数，g は閉曲面 S の種数 genus である（テキスト §10 参照）．

ご聴講ありがとうございました