

# 幾何学概論第二 (MTH.B212)

6: 測地線

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

[www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/)

東京工業大学理学院数学系

2021 年 01 月 21 日

# 測地線

$p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  : 正則曲面 ;  $\gamma(t) = (u(t), v(t)) : U$  上の曲線 ;  $\hat{\gamma} = p \circ \gamma$

## 定義

$\hat{\gamma}$  が測地線 a geodesic であるとは ,  $\left[ \ddot{\hat{\gamma}} \right]^T = \mathbf{0}$  が成り立つこと .

# 測地線

## 命題

測地線  $\hat{\gamma}$  の速度ベクトルの大きさは一定 .

(したがって測地線の問題は曲線のパラメータによる .)

## 例

- ▶ 平面上の直線は , 弧長パラメータで表示すれば測地線である .
- ▶ 球面上の大円 ( 球面と , その中心を通る平面との共通部分 ) は弧長パラメータで表示すれば測地線である .

# 測地線

## 例

正則曲面  $p(u, v) := (\cos u \operatorname{sech} v, \sin u \operatorname{sech} v, v - \tanh v)$  上の,  
 $u^2 + \cosh^2 v = a^2$  に対応する曲線 ( $a > 1$ ) は弧長パラメータで表  
示すると測地線である.

問題 4-2 ;  $|\kappa_n/\kappa| = 1$  .

# 測地線

## 命題

各  $t$  で  $\ddot{\hat{\gamma}}(t)$  が  $\{\dot{\hat{\gamma}}(t), \nu \circ \gamma(t)\}$  と一次従属なら,  $\hat{\gamma}$  を弧長パラメータ  $s$  で表した曲線は測地線.

準測地線

## 内的な量

正則曲面  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  に関する量のうち，第一基本量  $E, F, G$  のみによって表されるものを内的 intrinsic な量という．

- ▶ 長さ（弧長）
- ▶ 角度
- ▶ 面積
- ▶ Gauss 曲率
- ▶ 測地線

## 双曲平面

- ▶ 擬球面  $p(u, v) = (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v)$  ( $v > 0$ )
- ▶ 第一基本形式 :  $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v du^2 + \tanh^2 v dv^2$
- ▶ 座標変換 :  $(\xi, \eta) = (u, \cosh v) : ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}$  ( $\eta > 1$ )
- ▶ 拡張 :  $ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}$  ( $\eta > 0$ )
- ▶  $K = e^{-2\sigma} \Delta\sigma = -1$  . ( $ds^2 = e^{2\sigma}(d\xi^2 + d\eta^2)$ ) (問題 5-2) .
- ▶ 測地線 :  $(\xi, \eta)$  平面 ( $\eta > 0$ ) 上の  $\xi$  軸上に中心をもつ半円 .

## 双曲平面

$$(U, ds^2) ; U = \{(\xi, \eta) ; \eta > 0\} ; ds^2 = \frac{1}{\eta^2}(d\xi^2 + d\eta^2)$$

- ▶ Gauss 曲率  $-1$
- ▶ 測地線は  $\xi$  軸上に中心をもつ半円または  $\xi$  軸に直交する半直線 .

## 事実

双曲平面は,  $\mathbb{R}^3$  の曲面として実現できない ( D. Hilbert , 1901 )



## Gauss-Bonnet の定理

- ▶  $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  : 正則曲面
- ▶  $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) :  $U$  上の曲線
- ▶  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = B, \gamma_2(1) = \gamma_3(0) = C, \gamma_3(1) = \gamma_1(0) = A$
- ▶ これらが囲む領域  $\Delta ABC$  が閉円板と同相 .

Theorem (Gauss-Bonnet の定理 , テキスト 定理 10.6)

線分  $\hat{\gamma}_j = p \circ \gamma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) が測地線であるとき ,

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \int_{\Delta ABC} K dA \quad (dA = \sqrt{EG - F^2} du dv).$$

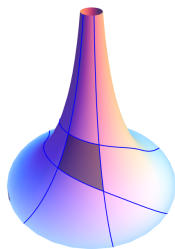
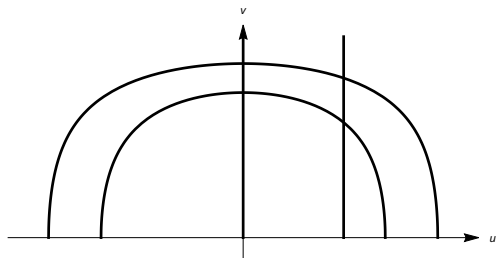
# Gauss-Bonnet の定理

## 問題 (問題 3-1)

$U = \{(u, v); v > 0\}$  で定義された曲面の第一基本形式が  $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v du^2 + \tanh^2 v dv^2$  となるとする.  $U$  上の曲線  $u^2 + \cosh^2 v = a^2$  ( $a > 1$ ) に対応する曲面上の曲線を  $C_a$ , 直線  $u = b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) に対応する曲面上の曲線を  $L_b$  とするとき,

1.  $C_a$  の長さを求めなさい.
2.  $C_a$  と  $L_b$  の交点  $P$  における交角を求めなさい.
3.  $\bar{\Omega} := \{(u, v) \in U; a_1^2 \leq u^2 + \cosh^2 v \leq a_2^2, 0 \leq u \leq b\}$  に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい. ただし  $a_1, a_2, b$  は  $1 < a_1 < a_2, 0 < b < \sqrt{a_1^2 - 1}$  を満たす定数である.

## 問題 3-1



$$(\text{面積}) = \cos^{-1} \frac{b}{a_2} - \cos^{-1} \frac{b}{a_1}$$

$$(\text{内角の和}) = 2\pi - \cos^{-1} \frac{b}{a_2} + \cos^{-1} \frac{b}{a_1}.$$

# 大域的な Gauss-Bonnet の定理

定理 (大域的な Gauss-Bonnet の定理 (テキスト定理 10.7))

コンパクトで向き付けられた 2次元多様体  $S$  上で定義された大域的な正則曲面  $p: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$$

が成り立つ。ただし  $K$ ,  $dA$  はそれぞれ曲面の Gauss 曲率, 面積要素,  $\chi(S)$  は  $S$  の Euler 数,  $g$  は閉曲面  $S$  の種数 genus である (テキスト §10 参照)。

ご聴講ありがとうございました