2021 年 01 月 21 日 (2021 年 1 月 22 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 6

■お知らせ

- 今回が最終回です．ご聴講ありがとうございました．
- 学修アンケートにご協力ください．`https://www.ks-fdcenter.net/fmane_titech/Ans?ms=t&id=titech&cd=RYKB4sDL`
  3Q「幾何学概論第一」では回答者が 11 名でした．もう少し回答してほしいな．
- 定期試験は 1 月 28 日，内容は前回予告の通り．
- 定期試験アンケートにご協力いただきありがとうございました．34 名の方からご回答をいただきました．全ての方がご自宅で受験と回答されていますので，教室での受験に対する準備は特に行いません．教室で受験されても構いませんが，条件は自宅の場合と同一とします．
- 定期試験アンケートにあったご質問です：
  - このアンケートの質問文の講義名が「幾何学概論第一」になってます。**A:** ありがとうございます．修正しました．
  - 期末試験の模範解答や解説は貰えるのか？ **A:** 解答例は T2SCHOLA，講義 web ページで公開します．なお「解答例」であって「模範解答」ではありません．
  - 期末試験の点数を教えて欲しいです。**A:** まだ終わっていないので教えられません．試験終了後はフィードバックします．

■前回までの訂正

- 講義資料 5, 3 ページ 1 行目：$c(0) = c(1) \Rightarrow c(0) = c(1) = \mathrm{P}$
- 講義資料 5, 3 ページ 2 行目：$C(0,t) = c(t)$, $C(1,t) = \mathrm{P} \Rightarrow C(0,t) = c(t)$, $C(1,t) = \mathrm{P}$, $C(s,0) = C(s,1) = \mathrm{P}$.
- 講義資料 5, 3 ページ，脚注 2：Sprintger ⇒ Springer
- 講義資料 5, 4 ページ，8 行目：$(1,1)$, $(2,1)$-成分 ⇒ $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$-成分.
- 映写資料 2, 7 ページ，Ω の $(2,1)$-成分：$-\theta_v \csc\theta \Rightarrow -\theta_u \csc\theta$
- 映写資料 2, 9 ページ：Sin-Grodon ⇒ Sine-Gordon
- 映写資料 2, 12 ページ，1 番下：$\ddot{v} = -\frac{1}{a^2}\cosh v\,\mathrm{csch}^2 v(\dots) \Rightarrow \ddot{v} = -\frac{1}{a^2}\mathrm{cotanh} v\,\mathrm{csch}^2 v(\dots)$
- 映写資料 3, 3 ページ，2 行目：の $\mathrm{P} \in U \Rightarrow \mathrm{P} \in U$（「の」を削除)
- 映写資料 3, 3 ページ，3 行目：$c(0) = c(1) \Rightarrow c(0) = c(1) = \mathrm{P}$
- 映写資料 3, 3 ページ 5 行目：$C(0,t) = c(t)$, $C(1,t) = \mathrm{P} \Rightarrow C(0,t) = c(t)$, $C(1,t) = \mathrm{P}$, $C(s,0) = C(s,1) = \mathrm{P}$
- 黒板 2, 9 ページ, 右下：$u = t + x$, $v = t - x \Rightarrow u = (t + x)/2$, $v = (t - x)/2$
- 試験予告にて「$A(z)$ は 1 より大きい」と口頭で言ったそうです.「$A(z)$ は 1 以上」です.

■授業に関する御意見

- 成績を確定する際に採点時に決める関数 $A(z)$ の関数（連続関数等であれば関数 $A(z)$ を表す初等関数等での具体的な表式，不連続関数であれば $z = 0, 1, 2, \dots, 100$ に対する $A(z)$ の値等）は公表されますか.　**山田のコメント：** はい.
- 「会食するな，飲み会するな，飯を食うならぼっち飯」ゴロがよくて好きです．20 時閉店なんかよりよっぽど効果的な気がします.　**山田のコメント：** Thanks. 広めましょう.

■質問と回答

質問 1： 講義資料の Gauss-Codazzi 方程式のところで，適合条件から得られる 3 本のうち 1 本は Gauss 曲率を E, F, G とその偏導関数で表した式となるそうですが，残りの 2 本は適合条件の式から計算する以外の求め方はありますか？

お答え： 適合条件そのものなのですが.

質問 2： 適合条件を可積分条件とも呼ぶのはなぜですか．/ 講義の黒板の「事実（テキスト，定理 B-9.4)」について，前回の講義で「適合条件」と呼んでいたものが「可積分条件」とも言われていましたが，これは何か可積分になるような条件なのでしょうか. $\mathcal{F}\Omega$ や $\mathcal{F}\Lambda$ かなと思ったのですが，よくわからず，そうだとしてもどのような意味があるのか分かりませんでした.

お答え： 「微分方程式を解く」ことを慣用的に「積分する」という．偏微分方程式が解けるための条件だから可積分条件.

質問 3： ガウス方程式から E, F, G, L, M だけで N を決められるので，曲面の決定に必要なパラメータは 5 つで済む様に思いました．適合条件からさらに独立な式が 2 本出てくるので，もっと少ないパラメータで表現できるのではないかと思いましたがそうはいかないのでしょうか.（5-2 で実験してみましたが，よくわかりませんでした).

お答え： はい．なので曲面を決定するには関数 3 個分の情報が必要．しかし，E, F, G, L, M, N の 3 つから残りを陽に表すのは簡単でない（一般にはたぶんできない)．ご質問では N を求めることができる，と言っているが，$L = 0$ の点では N が定まらない.

質問 4： 問 5-1 において $\eta_u = -\xi_v$, $\eta_v = \xi_u$ を満たす $\eta(u,v) = -\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)$ が得られたのですが，$\{(u,0) | u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ では定義できず，U 上の関数にならないのではと思いました．U 上の点全てで定義できなくても良いのでしょうか？

お答え： よいところに気が付きました（だまって $\tan^{-1}(u/v)$ としている答案が多かった)．実は U 上で定義されたなめらかな関数が存在します（もちろん Poincaré の補題からそうなんですが).

質問 5： 問題 5-1 に関して，$v \neq 0$ であれば $\eta = -\tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)$ も $\eta_u = -\xi_v$, $\eta_v = \xi_u$ の解だと思うのですが，領域 U によっては唯一つ存在しないのではないでしょうか． **お答え：**差が定数です．$\tan(\frac{\pi}{2} - t) = \cot t$ を思い出そう．

質問 6： Poincare の補題の可積分条件を用いた証明は存在しか証明していない気がします．$\forall g \colon U \to \mathbb{R}$, $dg = \alpha\, du + \beta\, dv$ として，$f := \log \mathcal{F}$ との差を比べ，$dg - df = 0 \Rightarrow g - f = \mathrm{const}$ とすれば容易に求まるのですが.

お答え： はい，そういうことです．ここで領域 U の連結性を使っていますね.

質問 7： ポアンカレの補題は高い頻度で使っているとのことでしたが，具体的にはどういうときに使っていたのでしょうか.

お答え： 次元が一つ高いがたとえばポテンシャルの存在．静電場 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ は $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ を満たすので $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V$ となる関数 V が存在する．この事実は Poincaré の補題とみなすことができる.

質問 8： 「正確な地図が存在するとすれば C^∞-級写像 $p \colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ であって，その第 1 基本形式が $ds^2 = du^2 + dv^2$ となるものが存在しなければならない」とありますが，その理由は次で合ってますか（以下略）.

お答え： テキストの命題 7.4．なお p の定義域が $\mathbb{R}^2$ 全体である必要はありません.

質問 9： 閉曲面の地図はゆがみなく作れないということでしょうか．ドラゴンクエスト 2 のような上端と下端をつないで右端と左端をつないだ世界はトーラスなんじゃないかと言われますが，DQ2 の地図は歪んでいないので，少なくともトーラスではなさそうです．DQ2 の世界は無限にひろがる平面と考えるのは妥当なんですか．もしくは無限に長い円柱面.

お答え： 「閉曲面の地図は作れない」などとはいっていません．「地球の距離を保った地図はどんな狭い領域でも作れない」．「どんな狭い範囲でも」と言っているので閉曲面であることは本質ではありません．DQ2 の世界は位相的にはトーラス，世界自体が平坦なので「平坦な計量を入れたトーラス」すなわち平坦トーラスです．これは $\mathbb{R}^3$ の曲面としては実現できませんが，コンパクトな 2 次元 Riemann 多様体です.

質問 10： 「Gauss の驚異の定理」という名前がつけられたのは「正確な地図が存在しない」という系があるからですか？仮にそうだとしたら「Gauss の驚異の定理」が証明されてから「正確な地図は存在しない」という系が証明されるまでの年月はたっていないということですか？ **お答え：**前半：Gauss 曲率が intrinsic である（今回の講義参照）ということだと思います．後半：多分 Gauss 自身が言及していたはず.

質問 11： $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ が単連結でないことの証明を $c(t) = (\cos 2t\pi, \sin 2t\pi)$ というループについての背理法で示そうとしたのですが，うまく行きませんでした．C が原点の近くで連続に取れないことを言うにはどうすればよいですか.

お答え： 中間値の定理が何らかの形で使えると思うが自明でない．いま C を講義資料 5 のような c の連続変形とすると，各 $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ に対して原点と $C(s, t)$ を結ぶ線分の偏角 $\theta(s, t)$ が定義できる．さらに，これは連続関数 $\theta \colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ とできるが，各 $t \mapsto C(s, t)$ がループであることから $\theta(s, 1)$ は 2π の整数倍．ところが $\theta(0, 1) = 2\pi$, $\theta(1, 1) = 0$.

質問 12： 5-1 の領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ が $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ でない理由として，次の 2 つを考えたのですが，他にあるのでしょうか．(1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ が単連結でない．（ξ の共役な調和関数 η の唯一性が得られない)．(2) $\eta(u, v)$ が $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ の調和関数でない（$\{(u, 0)\,;\, u < 0\}$ で不連続).

お答え： それで十分だと思います．(1) の「唯一性」は「一価性」というべきだと思います.

質問 13： 曲面論の基本定理は単連結領域が前提となっていますが，単連結でない領域において，適合条件を満たす Ω, Λ に対して正則曲線（原文ママ：正則曲面？）が定義できない場合があるのでしょうか．それとも正則曲面が複数存在しうるのでしょうか.

お答え： 曲面論の基本定理については簡単に計算できる例が提示できませんでしたが，問題 5-1 のような現象がおきる.

質問 14： 曲面論の基本定理において，単連結領域であることを条件とするのは C^∞-級写像 $\mathcal{F}$ の一意性が言えないからですか.

お答え： 一意性ではなく一価性.

質問 15： 今回の命題のほとんどの前提の単連結の条件がどのように使っているのかわかりませんでした.

お答え： 解が一価関数になるために必要．問題 5-1.

質問 16： 単連結であるかどうかの判定条件のような物はありますか？単連結でないときは背理法で示せば良さそうですが.

お答え： 「判定条件」とはどんなものを指しますか．定義そのものも判定条件ですね．「背理法で示せばよい」とおっしゃっていますが，具体例でやってみてくださいね．ちなみに $\mathbb{R}^2$ の領域であれば円板と同相.

質問 17： 領域 U が単連結とは，要するに U は中身が詰まった？穴がないような状態のことを指していますか？もし違う場合，反例を挙げて頂きたいです． **お答え：**$\mathbb{R}^2$ の領域であれば円板と同相であることが必要十分.

質問 18： 共役な調和関数は元の調和関数と図形的にどんな関係にありますか．／共役という言葉は数学においていろいろな意味があると思いますが，今回の場合 (5-1) は 2 つの関数の間に図形的な可視化できる関係はありますか?

お答え： 例えば等高線が直交する.

質問 19： $\xi(u, v)$ に対して (ξ_u, ξ_v) に共役な $\eta(u, v)$ に対して (η_u, η_v) とは直交しますが（山田注：文が変ですね）平行になる（平行移動で重なる）ような ξ と η の関係は何と言えるのでしょうか.

お答え： 線型関係．実際，(ξ_u, ξ_v) と (η_u, η_v) が平行になる η が存在するなら $\eta = a\xi + b$ (a, b は定数) と書ける.

質問 20： 教科書の曲面論の基本定理の中の第一基本形式をリーマン計量と呼んでいますが，「第一基本形式」＝「リーマン計量」ですか？それともいずれかがもう一方の特別な条件下における名称なのでしょうか.

お答え： 同じものですが，曲面を考えるとき第一基本形式，曲面を忘れて ds^2 のみを考えるときに Riemann 計量という感じで使い分けます．今回の講義の後半.

質問 21： 問題 4-1 の計算法（クリストフェル記号を一度に全部求める部分）はどうやって思いついたのでしょうか？

お答え： いじっていれば気づく．一般に Γ_{ij}^k を求めるテキストの方法と実は全く同じ.

質問 22： 微分幾何学の代数幾何学との関係性を知りたいです．（片方の理論がもう片方に応用できる例など).

お答え： 複素幾何学だと対応がありますね．広大な分野ではありますが，山田はあまりそちらとあまり関わっていないのでなんとも.

6 測地線

■測地線・測地的曲率 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，U 上の正則曲線 $\gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr)$ に対応する曲面上の曲線を $\hat\gamma := p \circ \gamma$ と書く．

定義 6.1. $\hat\gamma$ が**測地線** a geodesic であるとは，$\left[\ddot{\hat\gamma}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ が成り立つこと．

命題 6.2. 測地線 $\hat\gamma$ の速度ベクトルの大きさは一定．（したがって測地線の概念は曲線のパラメータによる．）

> **証明：** 速度ベクトル $\dot{\hat\gamma}(t)$ は曲面の単位法線ベクトル ν に直交するから，$\frac{d}{dt}|\dot{\hat\gamma}|^2 = 2\ddot{\hat\gamma}\cdot\dot{\hat\gamma} = 2\left[\ddot{\hat\gamma}\right]^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\hat\gamma} = \mathbf{0}\cdot\dot{\hat\gamma} = 0$.

命題 6.3. 各 t で $\ddot{\hat\gamma}(t)$ が $\{\dot{\hat\gamma}(t), \nu\circ\gamma(t)\}$ と一次従属なら，$\hat\gamma$ を弧長パラメータ s で表した曲線は測地線.

> **証明：** 速度ベクトル $\frac{d}{ds}\hat\gamma(s)$ は $\dot{\hat\gamma}(t)$ $(t = t(s))$ と同じ向きを向き，加速度 $\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)$ は $\dot{\hat\gamma}(t)$, $\nu(\gamma(t))$ $(t = t(s))$ の線型結合で表される．一方 $\frac{d}{ds}\hat\gamma$ の大きさは一定だから $\frac{d}{ds^2}\hat\gamma$ は $\frac{d}{ds}\hat\gamma$ に直交する．したがって $\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma \in \mathbb{R}\nu$.

命題 6.3 の仮定を満たす曲線を**準測地線** a pre-geodesic と呼ぶことがある．

注意 6.4. $\hat\gamma(s)$ のパラメータ s が弧長であるとき，加速度ベクトル $\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)$ は速度ベクトル $\frac{d}{ds}\hat\gamma(s)$ に直交する．したがって $\left[\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)\right]^{\mathrm{T}}$ は $\frac{d}{ds}\hat\gamma(s)$ と $\nu(\gamma(s))$ の両方に直交する．そこで $\boldsymbol{n}_s(s) := \nu(\gamma(s)) \times \frac{d}{ds}\hat\gamma(s)$ とおくと，これは $\frac{d}{ds}\hat\gamma$, ν の両方に直交する単位ベクトル（**余法線ベクトル**とよばれる）で，

$$\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s) = \left[\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)\right]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)\right]^{\mathrm{N}} = \kappa_s(s)\boldsymbol{n}_s(s) + \kappa_n(s)\nu(\gamma(s))$$

と書ける．ただし $\kappa_n(s)$ は曲線の**法曲率**（第 5 回），$\kappa_s(s)$ を**測地的曲率** the geodesic curvature とよぶ．

命題 6.5. 曲線 $\gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr)$ に対応する曲線 $\hat\gamma = p\circ\gamma$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\ddot u + (\dot u)^2\Gamma_{11}^1 + 2\dot u\dot v\Gamma_{12}^1 + (\dot v^2)\Gamma_{22}^1 = 0, \quad \ddot v + (\dot u)^2\Gamma_{11}^2 + 2\dot u\dot v\Gamma_{12}^2 + (\dot v^2)\Gamma_{22}^2 = 0 \tag{6.1}$$

を満たすことである．式 (6.1) を**測地線の微分方程式**という．

■内的な量 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に関する量のうち，第一基本量 E, F, G のみによって表されるものを**内的** intrinsic な量という．曲線の弧長，2 曲線の成す角，閉領域の面積は内的である（第 3 回）．さらに驚異の定理（第 5 回，テキスト 123 ページの式 (11.3)）により Gauss 曲率もまた内的な量である．測地線の方程式 (6.1) の係数 Γ_{ij}^k (Christoffel 記号，命題 4.5) は第一基本量で表されるので，測地線は内的な概念である．

例 6.6. 第一基本形式が $ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$ の形（等温座標系；問題 2-2）のとき，Gauss 曲率 K は $K = -e^{-2\sigma}\Delta\sigma$ $(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2})$ を満たす（問題 5-2）．

擬球面 $p(u,v) = (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v)$ （問題 1-1, 2-1, 3-1, 4-2） の第一基本形式 $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\,du^2 + \tanh^2 v\,dv^2$ は $(\xi,\eta) = (u, \cosh v)$ $(\eta > 1)$ とおくことで，等温座標に変換できる：$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}$. この ds^2 は上半平面 $\{(\xi,\eta), \eta > 0\}$ まで拡張できて，$K = -1$ となるが，$\eta \in (0,1)$ の範囲では対応する曲面が存在しない．uv-平面上の曲線 $u^2 + \cosh^2 v = a^2$ $(a > 1$ は定数$)$ に対応する擬球面上の曲線は，弧長で表示すれば測地線である（問題 4-2）．これに対応する $\xi\eta$-平面上の曲線は原点を中心とする円の上半分である．

2021 年 01 月 21 日 (2021 年 1 月 22 日訂正)

例 6.7. 平均曲率は内的な量ではない．実際 $p_1(u,v)=(u,v,0)$，$p_2(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$ の第一基本形式はともに $ds^2=du^2+dv^2$ であるが，p_1 の平均曲率は 0，p_2 の平均曲率は 0 でない定数である．

■三角形の Gauss-Bonnet の定理　正則曲面 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ に対して U 上の曲線 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ が $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)=\mathrm{B}$, $\gamma_2(1)=\gamma_3(0)=\mathrm{C}$, $\gamma_3(1)=\gamma_1(0)=\mathrm{A}$ を満たし，これらをつなげて得られるループの内部が閉円板と同相な閉領域 $\Delta\mathrm{ABC}$ であるとする．A, B, C で出会う曲線分が成す角をそれぞれ $\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$, $\angle\mathrm{C}$ と書くと，

定理 6.8 (Gauss-Bonnet の定理，テキスト 定理 10.6)**.** 線分 $\hat\gamma_j=p\circ\gamma_j$ $(j=1,2,3)$ が測地線であるとき，

$$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=\pi+\int_{\Delta\mathrm{ABC}}K\,dA \qquad (dA=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv).$$

■2 次元多様体と曲面

定義 6.9. 2 次元（可微分）多様体 a differentiable 2-manifold とは，第二可算公理を満たす Hausdorff 空間 S と，S の開集合族 $\{U_\alpha\,;\,\alpha\in A\}$, 各 U_α から $\mathbb{R}^2$ への連続な単射 $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha\to\mathbb{R}^2\,;\,\alpha\in A\}$ の組で次を満たすものである：(1) $\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha=S$, (2) φ_α は U_α から $\varphi_\alpha(U_\alpha)\subset\mathbb{R}^2$ への同相写像 (3) $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ なら $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\colon\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ は微分同相写像.

「大域的な（正則）曲面」とは，2 次元可微分多様体 $S=(S;U_\alpha,\varphi_\alpha)$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $p\colon S\to\mathbb{R}^3$ で，各 α に対して $p\circ\varphi_\alpha^{-1}\colon U_\alpha\to\mathbb{R}^3$ が正則曲面を与えているものとする．

今回まで扱った正則曲面のさまざまな不変量はパラメータのとり方によらないので，大域的な曲面の不変量とみなすことができる．

定義 6.10. 2 次元可微分多様体 $(S,U_\alpha,\varphi_\alpha)$ が**向き付けられた** oriented 多様体である，とは各 U_α, U_β に対して，$\mathbb{R}^2$ の開集合間の微分同相写像 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ の Jacobi 行列式が常に正となるものである．

定理 6.11 (大域的な Gauss-Bonnet の定理（テキスト，定理 10.7）)**.** コンパクトで向き付けられた 2 次元多様体 S 上で定義された大域的な正則曲面 $p\colon S\to\mathbb{R}^3$ に対して

$$\int_M K\,dA=2\pi\chi(S)=2\pi(2-2g)$$

が成り立つ．ただし K, dA はそれぞれ曲面の Gauss 曲率，面積要素，$\chi(S)$ は S の Euler 数，g は閉曲面 S の種数 genus である（テキスト §10 参照）．

■Riemann 多様体　定理 6.11 は，Gauss 曲率，dA と S の位相不変量の関係式なので，曲面の第二基本形式を用いずに記述することができる．多様体 S に形式 $ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ が（座標変換により適切な成分の変換則を満たすように）付随しており，さらに $E>0$, $G>0$, $EG-F^2>0$ を満たしているとき，組 (S,ds^2) を 2 次元 Riemann 多様体，ds^2 を Riemann 計量という．Gauss 曲率は内的であるから，2 次元 Riemann 多様体上の量とみなすことができる．

例 6.12. $S=\{(u,v)\,;\,v>0\}$ 上で $ds^2=\frac{du^2+dv^2}{v^2}$ と定めると，(S,ds^2) は 2 次元 Riemann 多様体である．例 6.6 で見たように，この Riemann 多様体の Gauss 曲率は -1 である．しかし，正則曲面 $p\colon S\to\mathbb{R}^3$ で第一基本形式がこの ds^2 となるようなものは存在しない（D. Hilbert, 1901）．