幾何学概論第二 (MTH.B212)

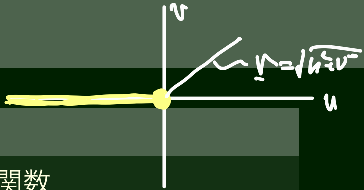
5: 曲面論の基本定理 (補足)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021 年 01 月 21 日

問題 5-1



問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,;\, u \leqq 0\}$ 上の関数 $\xi(u,v) = \log\sqrt{u^2+v^2}$ は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい．

$\Delta\xi = \xi_{uu} + \xi_{vv} = 0$

定理 (例 5.8)

連結

単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された調和関数 ξ に対して U 上の調和関数 η で

Cauchy-Riemann

$u+iv \mapsto \xi+i\eta$ が微分可能 証明

$$\begin{cases} \eta_u &= -\xi_v \\ \eta_v &= \xi_u \end{cases}$$

となるものが定数のぞいて唯一つ存在する．
η を ξ に共役な調和関数という．

$\eta_u = \tilde{\eta}_u \quad \eta_v = \tilde{\eta}_v$

$\eta = \tilde{\eta} +$ 定数 $\Leftarrow$

問題 5-1

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,;\, u \leqq 0\}$ 上の関数 $\xi(u,v) = \log\sqrt{u^2+v^2}$ は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい．

$$\xi_u = \frac{u}{u^2+v^2}, \qquad \xi_v = \frac{v}{u^2+v^2}$$

$$\Delta\xi = \xi_{uu} + \xi_{vv} = \frac{-u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} = 0$$

求めたいのは次を満たす関数 η:

$$\begin{cases} \eta_u & = \dfrac{-v}{u^2+v^2}, \\ \eta_v & = \dfrac{u}{u^2+v^2}. \end{cases}$$

問題 5-1

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,;\,u \leqq 0\}$ 上の関数 $\xi(u,v) = \log\sqrt{u^2+v^2}$ は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい．

解きたい微分方程式：

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

$$\begin{cases} \eta_u &= \dfrac{-v}{u^2+v^2} = \dfrac{-\frac{v}{u^2}}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}\left(\dfrac{v}{u}\right)_u \\ \eta_v &= \dfrac{u}{u^2+v^2} = \dfrac{\frac{1}{u}}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}\left(\dfrac{v}{u}\right)_v \end{cases}$$

$-\tan^{-1}\dfrac{u}{v}$

θ indef.

$$\boxed{\eta = \tan^{-1}\frac{v}{u} + \text{(constant)}}$$

問題 5-1

$\eta_u = \alpha \qquad \eta_v = \beta$

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,;\, u \leqq 0\}$ 上の関数 $\xi(u,v) = \log\sqrt{u^2+v^2}$ は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい．

$$\boxed{\eta = \tan^{-1}\frac{v}{u} + (\text{constant})}$$

$\alpha\,du + \beta\,dv$

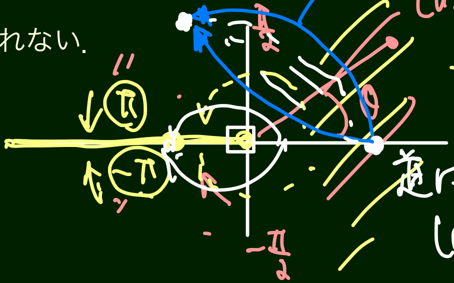
線積分

(u,v)

- $u = 0$ で定義されない．

単連結

$-\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}$



道によらない

(可積分条件)

問題 5-1

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,;\,u \leqq 0\}$ 上の関数 $\xi(u,v) = \log\sqrt{u^2+v^2}$ は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい．

$$\eta(u,v) := \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{v}{u} & \text{on} \quad U_1 := \{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,;\,u>0\}, \\ \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{u}{v} & \text{on} \quad U_2 = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,;\,v>0\}, \\ -\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{u}{v} & \text{on} \quad U_3 = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,;\,v<0\}. \end{cases}$$

atan2(u, v)

- $U_i \cap U_j$ 上ではどの定義でも同じ値をとる
- η は $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ 上で C^∞-級．

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ では
η が def できない

問題 5-1

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,;\, u \leqq 0\}$ 上の関数 $\xi(u,v) = \log\sqrt{u^2+v^2}$ は調和関数であることを確かめ，その共役な調和関数を求めなさい．

- $(u,v) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ (極座標）とおくと
$$\eta_r = 0, \qquad \eta_\theta = 1.$$
  したがって $\eta = \theta$.
- ξ は $\hat{U} := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^∞-級.
- η は $\hat{U}$ 上の C^∞-級関数にならない.

一価性がこわれる

黒板

問題 5-2

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 σ に対して，

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき，曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N を用いて表しなさい．

Gauss 枠 $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ が満たす方程式 $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$ の適合条件

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$$

を書き下す．

等温座標（必ず存在）

問題 5-2

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 σ に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき，曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N を用いて表しなさい.

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -\sigma_u \\ -\sigma_v & \sigma_u & \sigma_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-2\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma}L & e^{-2\sigma}M \\ e^{-2\sigma}M & e^{-2\sigma}N \end{pmatrix}$$

問題 5-2

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 σ に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき，曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N を用いて表しなさい.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}L \\ -\sigma_v & \sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_v & -\sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}N \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 5-2

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 σ に対して，

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき，曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N を用いて表しなさい．

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}L \\ -\sigma_v & \sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_v & -\sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}N \\ M & N & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 5-2

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 σ に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき，曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N を用いて表しなさい.

Frenet 公式

(空間曲線)

$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = \begin{pmatrix} 0 & A & -e^{-2\sigma}B \\ -A & 0 & -e^{-2\sigma}C \\ B & C & 0 \end{pmatrix}$$

可積分条件を あらわす式

3本

$$A = \Delta\sigma + e^{-2\sigma}(LN - M^2)$$

$$B = L_v - M_u - \sigma_v(L + N)$$

$$C = M_v - N_u - \sigma_u(L + N)$$

問題 5-2

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 σ に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき，曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N を用いて表しなさい.

適合条件：

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = e^{-4\sigma}(LN - M^2)$$

$$\Delta\sigma = -e^{-2\sigma}(LN - M^2) = -e^{2\sigma}K \qquad \text{(Gauss 方程式)}$$

$$L_v - M_u = \sigma_v(L + N) \qquad \text{(Codazzi 方程式)}$$

$$M_v - N_u = \sigma_u(L + N) \qquad \text{(Codazzi 方程式)}$$

問題 5-2

問題

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 σ に対して,

$$ds^2 := e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

とおくとき，曲面論の基本定理に現れる適合条件を σ, L, M, N を用いて表しなさい.

$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$: 等温座標系

問題 5-3

問題

曲面 p の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad II = 2M\,du\,dv$$

と表されているとする．さらに Gauss 曲率が負の定数であるとき，E は u のみの関数，G は v のみの関数であることを示しなさい．

$L = N = 0$

漸近座標

$E_v = 0$ $G_u = 0$

- Codazzi 方程式から $E_v = G_u = 0$ がでる．
- 一般形の Codazzi 方程式を知らなくても，$\nu_{uv} = \nu_{vu}$ の接成分を書き下せばよい．

問題

$-k^2$

$K = \dfrac{-M^2}{EG-F^2}$

曲面 p の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad II = 2M\,du\,dv$$

と表されているとする．さらに Gauss 曲率が負の定数であるとき，E は u のみの関数，G は v のみの関数であることを示しなさい．

計算のヒント：$K = -k^2$（k は零でない定数）とおくと

- $E_u = 2p_{uu} \cdot p_u = 2(\Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v) \cdot p_u = 2(E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2) \ldots$
- $M = \dfrac{k}{\lambda}$ $(\lambda = \sqrt{EG - F^2})$
- $\lambda_u = \lambda(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)$, $\lambda_v = \lambda(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2)$.
- $A = \frac{k}{\lambda}\begin{pmatrix} -F & G \\ E & -F \end{pmatrix}$

$\gamma_{uv} = \gamma_{vu}$

$E = p_u \cdot p_u$

$p_{uu} = \Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v + L\nu$

問題 5-3

- $K < 0$ ならば漸近線座標（テキスト 234 ページ）すなわち $L = N = 0$ となるパラメータが存在する（例：問題 2-2）
- K が負の定数なら，漸近線座標における第一基本量は $E = a(u)^2$，$G = b(v)^2$ という形にかける．ただし a, b は一変数関数（問題 5-3）：

$d\xi^2$ $d\eta^2$

$$ds^2 = a(u)^2\,du^2 + 2F\,du\,dv + b(v)^2\,dv^2$$

- 上の状況であたらしい座標系 (ξ, η) を

$$\xi := \xi(u) = \int a(u)\,du, \qquad \eta := \eta(v) = \int b(v)\,dv$$

と定めると，これは漸近線座標で，

ここ $G = 1$

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\widetilde{F}\,d\xi\,d\eta + d\eta^2, \quad II = 2\widetilde{M}\,d\xi\,d\eta.$$

問題 5-3

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\widetilde{F}\, d\xi\, d\eta + d\eta^2, \qquad I\!I = 2\widetilde{M}\, d\xi\, d\eta.$$

- とくに Gauss 曲率 -1 なら $\widetilde{M} = \sin\theta$, $\widetilde{F} = \cos\theta$ と書ける：
  漸近 Chebyshev 網（問題 2-1）

  $$\boxed{ds^2 = d\xi^2 + 2\cos\theta\, d\xi\, d\eta + d\eta^2, \qquad I\!I = 2\sin\theta\, d\xi\, d\eta.}$$

- このとき，適合条件は（問題 4-1）：

$$\theta_{\xi\eta} = \sin\theta \qquad \text{(sine-Gordon 方程式)}$$

事実

Sine-Gordon 方程式の解と Gauss 曲率一定 -1 の曲面が
"1 対 1 対応" する.