# 幾何学概論第二 (MTH.B212)

## 6: 測地線

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2021 年 01 月 21 日

# 測地線

geodesique

$p\colon U \to \mathbb{R}^3$ : 正則曲面 ; $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ : $U$ 上の曲線 ; $\hat{\gamma} = p \circ \gamma$

## 定義

$\hat{\gamma}$ が測地線 a geodesic であるとは, $\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ が成り立つこと.

$\gamma(t) = (u_0, v_0)$

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{(dp)\left(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2\right)}_{接} \oplus \underbrace{\mathbb{R}\,\nu(u_0,v_0)}_{法}$$

$$\boxed{\ddot{\hat{\gamma}} \,/\!/\, \nu}$$

# 測地線

$$\frac{d}{dt}(\dot{\hat\gamma}\cdot\dot{\hat\gamma}) = 2\ddot{\hat\gamma}\cdot\dot{\hat\gamma} = 0$$

法　接

## 命題

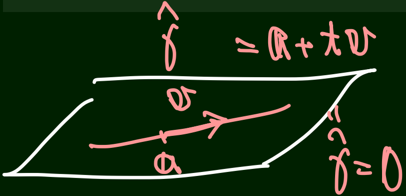
測地線 $\hat\gamma$ の速度ベクトルの大きさは一定.

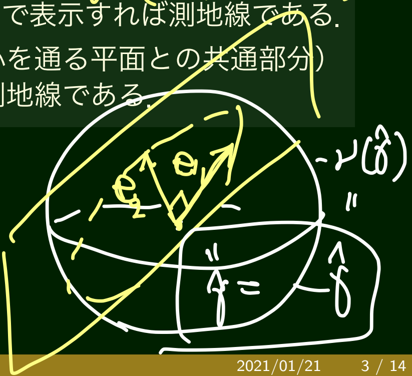
（したがって測地線の概念は曲線のパラメータによる.）

## 例

$\hat\gamma = (\cos t)e_1 + (\sin t)e_2$

- 平面上の直線は，弧長パラメータで表示すれば測地線である.
- 球面上の大円（球面と，その中心を通る平面との共通部分）は弧長パラメータで表示すれば測地線である.



# 測地線

## 例

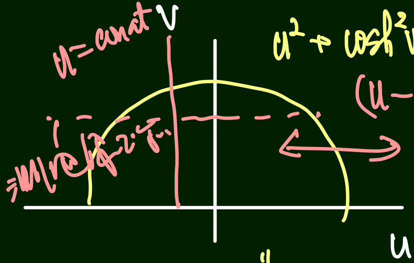
The pseudosphere

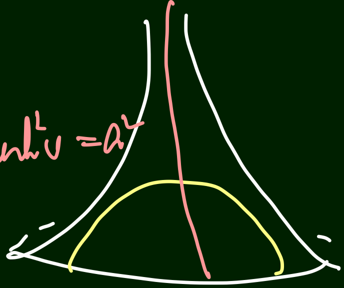
正則曲面 $p(u,v) := (\cos u \operatorname{sech} v, \sin u \operatorname{sech} v, v - \tanh v)$ 上の, $u^2 + \cosh^2 v = a^2$ に対応する曲線 $(a > 1)$ は弧長パラメータで表示すると測地線である.

問題 4-2 ; $\boxed{|\kappa_n/\kappa| = 1.}$

$u^2 + \cosh^2 v = a^2$

$(u-\alpha)^2 + \cosh^2 v = a^2$



$\kappa_n = \ddot{\gamma} \cdot \nu$

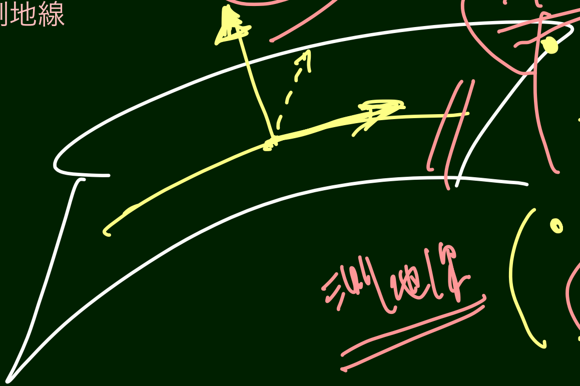
$|\ddot{\gamma}| = \kappa \qquad [\ddot{\gamma}]^T = 0$

# 測地線 ＝“直線”

**命題**

各 $t$ で $\ddot{\hat{\gamma}}(t)$ が $\{\dot{\hat{\gamma}}(t), \nu\circ\gamma(t)\}$ と一次従属なら，$\hat{\gamma}$ を弧長パラメータ $s$ で表した曲線は測地線.

準測地線



準測地線

ぴんとはった糸

2点をむすぶ最短線

測地線

・慣性運動

等速直線運動

# 内的な量

intrinsic

正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に関する量のうち，第一基本量 $E$, $F$, $G$ のみによって表されるものを内的 intrinsic な量という．

- 長さ（弧長）
- 角度
- 面積
- Gauss 曲率
- 測地線

$$\ddot{\hat{\gamma}} = \left(\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2\right)p_u + \left(\ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2\right)p_v$$

E, F, G

$= 0$

平均曲率：内的でない

$p = (u, v, 0)$ $H = 0$

$\gamma = (\cos u, \sin u, v)$ 円柱 $H = \frac{1}{2}$

$ds^2$ 共通 $du^2 + dv^2$

# 双曲平面

$v>0$

- 擬球面 $p(u,v) = (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v)$ $(v>0)$
- 第一基本形式：$ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$

$d\xi^2$ $\qquad \dfrac{d\eta^2}{\sinh^2 v}$

- 座標変換：$(\xi,\eta) = (u, \cosh v)$：$ds^2 = \dfrac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}$ $(\eta > 1)$
- 拡張：$\boxed{ds^2 = \dfrac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2}}$ $(\eta > 0)$

$d\sigma^2 = e^{+2\sigma}(du^2+dv^2)$

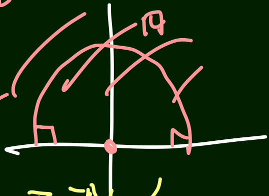
virtual

- $K = e^{-2\sigma}\Delta\sigma = -1$. $(ds^2 = e^{2\sigma}(d\xi^2 + d\eta^2))$（問題 5-2）.
- 測地線：$(\xi,\eta)$ 平面（$\eta > 0$）上の $\xi$ 軸上に中心をもつ半円.

$-$

$u^2 + \cosh^2 v = a^2$

$\xi^2 + \eta^2 = a^2$



双曲平面

非ユークリッド幾何のモデル

# 双曲平面

$(U, ds^2)$ ; $U = \{(\xi, \eta) ; \eta > 0\}$ ; $ds^2 = \frac{1}{\eta^2}(d\xi^2 + d\eta^2)$

- Gauss 曲率 $-1$
- 測地線は $\xi$ 軸上に中心をもつ半円または $\xi$ 軸に直交する半直線.

**事実**

双曲平面は，$\mathbb{R}^3$ の曲面として実現できない（D. Hilbert, 1901）

# Gauss-Bonnet の定理

- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$：$U$ 上の曲線
- $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \mathrm{B}$, $\gamma_2(1) = \gamma_3(0) = \mathrm{C}$, $\gamma_3(1) = \gamma_1(0) = \mathrm{A}$
- これらが囲む領域 $\Delta\mathrm{ABC}$ が閉円板と同相.

**Theorem (Gauss-Bonnet の定理，テキスト 定理 10.6)**

線分 $\hat{\gamma}_j = p \circ \gamma_j$ $(j = 1, 2, 3)$ が測地線であるとき，

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi + \int_{\Delta\mathrm{ABC}} K\, dA \qquad \boxed{\left(dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\right)}.$$

(面積要素)

# Gauss-Bonnet の定理

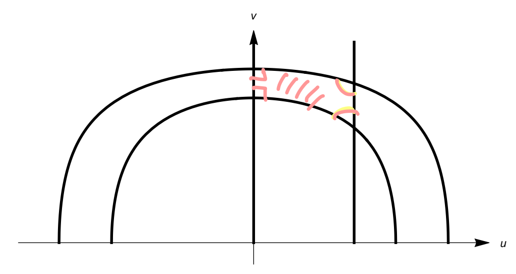
## 問題 (問題 3-1)

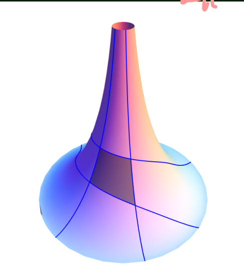
$U=\{(u,v)\,;\,v>0\}$ で定義された曲面の第一基本形式が $ds^2=\operatorname{sech}^2 v\,du^2+\tanh^2 v\,dv^2$ となるとする．$U$ 上の曲線 $u^2+\cosh^2 v=a^2$（$a>1$）に対応する曲面上の曲線を $C_a$，直線 $u=b$（$b\in\mathbb{R}$）に対応する曲面上の曲線を $L_b$ とするとき，

1. $C_a$ の長さを求めなさい．
2. $C_a$ と $L_b$ の交点 $\mathrm{P}$ における交角を求めなさい．
3. $\overline{\Omega}:=\{(u,v)\in U\,;\,a_1^2\leqq u^2+\cosh^2 v\leqq a_2^2, 0\leqq u\leqq b\}$ に対応する曲面上の閉領域の面積を求めなさい．ただし $a_1$, $a_2$, $b$ は $1<a_1<a_2$, $0<b<\sqrt{a_1^2-1}$ を満たす定数である．

# 問題 3-1

内角の和 $= 2\pi + \int K\,dA$
$= 2\pi - (\text{面積})$



$$
\begin{aligned}
(\text{面積}) &= \cos^{-1}\frac{b}{a_2} - \cos^{-1}\frac{b}{a_1}\\
(\text{内角の和}) &= 2\pi - \cos^{-1}\frac{b}{a_2} + \cos^{-1}\frac{b}{a_1}.
\end{aligned}
$$

$K = -1$

Gauss-Bonnet.

**定理 (大域的な Gauss-Bonnet の定理（テキスト定理 10.7）)**

コンパクトで向き付けられた 2 次元多様体 $S$ 上で定義された大域的な正則曲面 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$ に対して

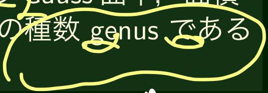
位相不変量

$$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2-2g)$$

2 

0 

が成り立つ．ただし $K$, $dA$ はそれぞれ曲面の Gauss 曲率，面積要素，$\chi(S)$ は $S$ の Euler 数，$g$ は閉曲面 $S$ の種数 genus である（テキスト §10 参照）．



曲面：パラメータが動くはんいが自明でない

⇝ $\boxed{\text{多様体}}$

# 黒板

ご聴講ありがとうございました