幾何学概論第二 定期試験 パート A 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は，すでに配布している所定の解答用紙の所定の欄に，採点者が読みとり，理解できるように書いてください.
- 答案は T2Scohla の課題「定期試験パート A」に提出してください. **提出締切は 11 時 30 分 JST**.
- 試験中の質問などは Zoom のチャットでお願いします.
- 採点結果は 2 月 4 日までにお知らせします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2021 年 2 月 12 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください. 上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.

テキスト・ノート・参考書などの参照可．外部との通信不可

問題 A1 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ のの第一基本形式 ds^2 と，単位法線ベクトル場 ν に関する第二基本形式 II が，U の座標 (u,v) を用いて

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \qquad II = \lambda E\,du^2 + \mu G\,dv^2$$

と表されているとする．ただし λ, μ は U 上の C^∞-級関数で $0 < \lambda(u,v) < \mu(u,v)$ を U 上で満たしているものとする．このとき,

$$q(u,v) := p(u,v) + \frac{1}{\lambda(u,v)}\nu(u,v)$$

で定まる曲面が (u_0, v_0) に特異点をもつための λ の条件を求めなさい.

問題 A2 単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の Gauss 曲率 K が U 上いたるところで零でないとする．さらに p の第一基本形式 ds^2 と，単位法線ベクトル場 ν に関する第二基本形式 II が，U の座標 (u,v) を用いて

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と表されているとする．このとき，第一基本形式 $d\tilde{s}^2$，第二基本形式 $\widetilde{II}$ が

$$d\tilde{s}^2 = ds^2, \qquad \widetilde{II} = 2L\,du^2 + 2(2M)\,du\,dv + N\,dv^2 = 2II$$

となるような曲面 $q\colon U \to \mathbb{R}^3$ は存在するか，理由をつけて答えなさい.

学籍番号：80709946	氏名：山田光太郎	提出物の成績：0

幾何学概論第二 定期試験 パート A 〔解答例 1〕

問題 A1 Weingarten 行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & \mu G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

なので，Weingarten の公式から

$$\nu_u = -\lambda p_u, \qquad \nu_v = -\mu p_v.$$

したがって

$$q_u = p_u + \frac{\lambda_u}{\lambda}\nu - p_u = \frac{\lambda_u}{\lambda}\nu, \qquad q_v = \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) p_v + \frac{\lambda_v}{\lambda}\nu$$

である．$1 - \mu/\lambda \neq 0$, p_v と ν は一次独立であるから，q_u と q_v が $(u_0, v_))$ で一次従属であるための必要十分条件は$\underline{\lambda_u(u_0, v_0) = 0}$ である．

問題 A2 p と q の第一基本形式は一致するので，Gauss の驚異の定理より Gauss 曲率は一致する．これを K と書くと，Gauss の方程式から

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad K = \frac{(2L)(2N) - (2M)^2}{EG - F^2} = 4\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

が成り立たなければならない．$K \neq 0$ からこれは不可能なので，条件を満たす曲面 q は存在しない．