幾何学概論第二 定期試験 パート B 〔問題 1〕

注意事項
- 答案は Google Forms （アドレス）にて提出してください **提出締切は 12 時 20 分 JST**.
- 試験中の質問などは Zoom のチャットでお願いします.
- 採点結果は 2 月 4 日までにお知らせします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2021 年 2 月 12 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい.

テキスト・ノート・参考書などの参照可．外部との通信不可

問題 B 以下の $\boxed{0}$～$\boxed{15}$ に当てはまる数・式・言葉を入れなさい． [60 点]

- $\boxed{0}$ の解答は必須.
- $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ は全部正解で 10 点，2 つ正解で 5 点.
- $\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ は全部正解で 10 点，2 つ正解で 5 点.
- $\boxed{7}$ ～ $\boxed{9}$ は全部正解で 10 点，2 つ正解で 5 点.
- $\boxed{10}$ ～ $\boxed{15}$ は各 5 点.

問題 B0 評価点は**課題の得点合計** x および**この試験の得点** y から

$$\min\left\{100, 5\times\left[A(z)\times\frac{z}{5}\right]\right\},\qquad z:=(1-a)(4x)+ay$$

で決定する．ただし $a=\boxed{0}\in[0,1]$，$A\colon[0,100]\to[1,+\infty)$ は採点時に決める単調非増加関数で $A(100)=1$ となるものである.

問題 B1 $\mathbb{R}^2$ の領域 $U:=(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ で定義された $\mathbb{R}^3$ への写像

$$p(u,v):=(\operatorname{sech}v\cos u,\operatorname{sech}v\sin u,\tanh v)$$

は正則曲面を与える．とくに $\nu(u,v):=(\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3})$ とおくと，これは p の単位法線ベクトル場で，p の第一基本形式 ds^2，ν に関する第二基本形式 $I\!I$ は

$$ds^2=\boxed{4}\,du^2+2\boxed{5}\,du\,dv+\boxed{6}\,dv^2,\quad I\!I=\boxed{7}\,du^2+2\boxed{8}\,du\,dv+\boxed{9}\,dv^2$$

となるので，Gauss 曲率 K, 平均曲率 H は $K=\boxed{10}$, $H=\boxed{11}$ となる.

領域 U 上の曲線

$$c_1:=\{(u,v)\in U\,;\,\cos u=\sinh v, u\geqq 0, v\geqq 0\},\quad c_2:=\{(u,0)\,;\,u\geqq 0\}$$

で与えられる曲線に対応する p の像上の曲線をそれぞれ C_1, C_2, とすると，c_1 と c_2 の共有点 $(\boxed{12},0)$ における C_1 の法曲率は $\boxed{13}$, C_1 と C_2 の交角は $\boxed{14}$ である．また U の閉領域

$$\overline{D}:=\{(u,v)\in U\,;\,\cos u\geqq\sinh v, u\geqq 0, v\geqq 0\}$$

に対応する曲面上の閉領域の面積は $\boxed{15}$ である.

問題 B∞ この科目の講義・教材・試験などについて，ご意見・ご感想などがありましたら自由にお書きください．この欄に書かれたことは成績に一切影響しません.

学籍番号：80709946	**氏名：山田光太郎**	**提出物の成績：0**

幾何学概論第二 定期試験 パート B 〔解答例 1〕

問題 B1 $\boldsymbol{e}_1 := (\cos u, \sin u, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 := (\boldsymbol{e}_1)_u = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 := (0,0,1)$ とおくと $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は右手系の正規直交基を与え,

$$p(u,v) = \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_1 + \tanh v \boldsymbol{e}_3$$

と書ける.

(1) $\qquad p_u = \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_2, \qquad p_v = -\tanh v \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v^2 \boldsymbol{e}_3 = \operatorname{sech} v(-\tanh v \boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_3).$

なので $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$ に注意すれば

$$\boldsymbol{e}_2 \times (-\tanh v \boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_3) = \operatorname{sech} v \boldsymbol{e}_1 + \tanh v \boldsymbol{e}_3 = p(u,v).$$

とくに $p \cdot p = \operatorname{sech}^2 v + \tanh^2 v = 1$ なので

$$\nu(u,v) = p(u,v) = \underline{(\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, \tanh v)} \left(= \left(\boxed{\ 1\ }, \boxed{\ 2\ }, \boxed{\ 3\ }\right)\right)$$

は単位法線ベクトル場を与える.

式 (1) から $p_u \cdot p_u = \underline{\operatorname{sech}^2 v}(= \boxed{\ 4\ })$, $p_u \cdot p_v = \underline{0}(= \boxed{\ 5\ })$, $p_v \cdot p_v = \underline{\operatorname{sech}^2 v}(= \boxed{\ 6\ })$ なので,

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \operatorname{sech}^2 v\, dv^2 = \operatorname{sech}^2 v(du^2 + dv^2).$$

一方 $\nu = p$ なので，第二基本量は $L = -p_u \cdot \nu_u = -p_u \cdot p_u = \underline{\operatorname{sech}^2 v}(= \boxed{\ 7\ })$, $M = -p_u \cdot \nu_v = -p_u \cdot p_v = \underline{0}(= \boxed{\ 8\ })$, $N = -p_v \cdot \nu_v = -p_v \cdot p_v = \underline{\operatorname{sech}^2 v}(= \boxed{\ 9\ })$．したがって，第二基本形式は $I\!I = -\operatorname{sech}^2 v(du^2 + dv^2) = -ds^2$．このことから Weingarten 行列は $-\mathrm{id}$ (id は単位行列) となるので $K = \underline{1}(= \boxed{\ 10\ })$, $H = \underline{-1}(= \boxed{\ 11\ })$.

曲線 c_1, c_2 の共有点を $p_0 := \left(\frac{\pi}{2}(= \boxed{\ 12\ }), 0\right)$ である． 曲線 C_1 を $\gamma_1(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ と弧長パラメータ t で表示すると，$(u(t), v(t))$ が c_1 上にあることから

$$\cos u(t) = \sinh v(t), \qquad -\dot{u}(t) \sin t = \dot{v}(t) \cosh v(t)$$

なので，点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ において $\dot{u} = -\dot{v}$．したがって C_1 の $\mathrm{P}_0 := p(\frac{\pi}{2})$ 速度ベクトルは $\dot{u}p_u + \dot{v}p_v = \dot{u}(p_u - p_v)$．とくに弧長パラメータであることから $\dot{u} > 0$ となる方向をとれば,

$$1 = \dot{u}^2 |p_u - p_v|^2 = 2\dot{u}^2 \operatorname{sech}^2 0, \qquad \text{したがって} \qquad \dot{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

このことから，γ_1 の P_0 における法曲率は $L(\dot{u})^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N(\dot{v})^2 = -\operatorname{sech}^2 0 = \underline{-1} = (\boxed{\ 13\ })$.

γ_1 の P_0 における速度ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}}(p_u(\frac{\pi}{2}, 0) - p_v(\frac{\pi}{2}, 0)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3)$. 一方 C_2 は $p(u, 0)$ と表示されるので P_0 における単位接ベクトルは $p_u(u, 0) = \boldsymbol{e}_2$ なので，これらの成す角は $\underline{\frac{\pi}{4}}(= \boxed{\ 14\ })$.

最後に，求める面積は

$$\begin{aligned}
\iint_D \operatorname{sech}^2 v\, du\, dv &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{\sinh^{-1} \cos u} \operatorname{sech}^2 v\, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tanh \sinh^{-1} \cos u\right) du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh \sinh^{-1} \cos u}{\cosh \sinh^{-1} \cos u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{2 - \sin^2 u}} du \\
&= \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{2 - \xi^2}} = \int_0^1 \frac{d(\xi/\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \left(\xi/\sqrt{2}\right)^2}} = \left[\sin^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{4}}(= \boxed{\ 15\ }).
\end{aligned}$$

幾何学概論第二 定期試験 パート B 〔解答例 2〕

種明かし

Weingarten 行列が単位行列のスカラ倍になっているから，曲面は全臍的であることがわかる．とくに主曲率が -1 なので，曲面は単位球面の一部である．
実際 p は単位球面の Mercator 図法による表示を与えている．このとき，曲線 $v=0$ は赤道，曲線 $u=0$ は一つの経線を与えている．これらは球面の大円であるからとくに測地線である．一方，曲線 c_2 の定義式 $\cos u = \sinh v$ は

$$p(u,v)\cdot(1,0,-1) = \operatorname{sech} v\cos u - \tanh v = \operatorname{sech} v(\cos u - \sinh v) = 0$$

と同値．すなわち，曲面上の曲線 C_2 は球面と，原点をとおりベクトル $(1,0,-1)$ に垂直な平面との共通部分．したがって C_2 も大円である．赤道 C_1 と C_2 の交角は，それらを含む平面の法線ベクトルのなす角と一致する（向きを考慮して）$\pi/4$ となる．
領域 $\overline{D}$ に対応する球面上の領域は 3 つの測地線で囲まれる三角形で，その内角は $\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}$ であるから，Gauss-Bonnet の定理により

$$\iint_{\overline{D}} dA = \iint_{\overline{D}} K\,dA = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\pi = \frac{\pi}{4}.$$