幾何学概論第一 (MTH.B211)

ユークリッド空間の曲線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/07

目標

定理 (命題 1.3)

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される.

ユークリッド空間

定義

1. ユークリッド空間：$\mathbb{R}^n$ に標準的な内積 “$\cdot$” を与えたもの.
2. 大きさ：$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$.
3. 角度：$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して

$$\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \cos^{-1} \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|}$$

4. 2 点 P, Q $\in \mathbb{R}^n$ に対して $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$.　ユークリッド距離

注：

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$.
- $(\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v \cdot w &= v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = {}^t v\, w \end{aligned}$$

t: 転置

tenchi

(transposition)

直交行列

定義

実数を成分とする n 次正方行列が直交行列であるとは

$$ {}^tAA = A^tA = I \qquad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列}) $$

$A^{-1} = {}^tA$

- 直交行列 $\Leftrightarrow$ 内積を保つ線形変換：$(A\boldsymbol{v}) \cdot (A\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$
- 直交行列 $\Leftrightarrow$ 大きさを保つ線形変換：$|A\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$
- $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が直交行列 $\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交系

$a_i \cdot a_j = \delta_{ij}$

直交群

命題

直交行列の行列式は 1 または −1 である．

$$\left(\begin{array}{l} {}^tAA = I \\ \det {}^tA = \det A \end{array} \right)$$

$$\mathrm{O}(n) := \{n\ 次直交行列\} \qquad 直交群$$

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n)\,;\, \det A = 1\} \qquad 特殊直交群$$

- $\mathrm{O}(n)$ は行列の積に関して群をなす．
  - $A, B \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow AB \in \mathrm{O}(n)$（結合則 $(AB)C = A(BC)$）．
  - $I \in \mathrm{O}(n)$
  - $A \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$．
- $\mathrm{SO}(n)$ は行列の積に関して群をなす（$\mathrm{O}(n)$ の部分群）

2次直交行列

命題

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

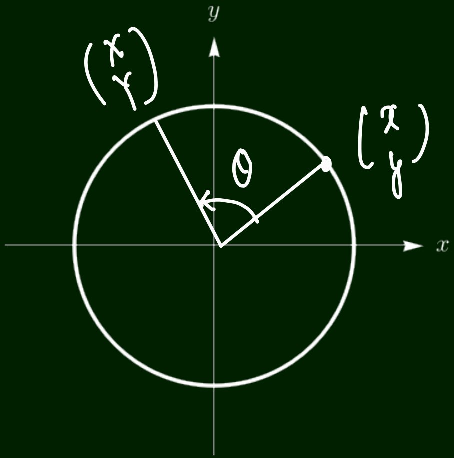
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

となる a.b.c.d を定める

回転

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

回転は $e^{i\theta}$

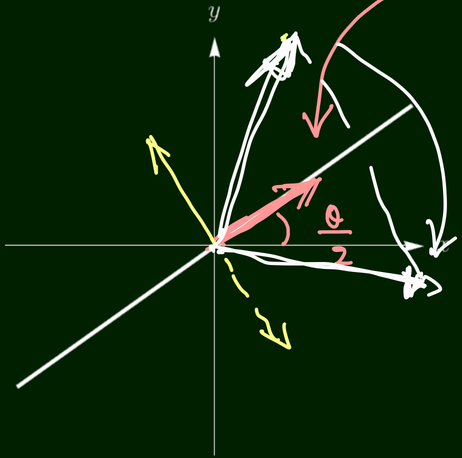


折返し

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

固有値 1 $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

-1 $\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$



3 次直交行列

問題

$A \in \mathrm{SO}(3)$ ならば，ある $P \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して

$$ {}^{t}PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. $$

- A の固有値の一つは 1．その単位固有ベクトルを $\boldsymbol{a}_1$ とする．
- $\boldsymbol{a}_1$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ をひとつとる．
- $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$（ベクトル積）とする．
- $P = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ とおく．

等長変換 合同変換

定義

写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が等長変換であるとは (距離を保つこと)

$$d\bigl(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})\bigr) = d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \qquad (\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つこと.

- $\mathbb{R}^n$ の等長変換全体は写像の合成に関して群をなす.

補題

直交行列 $A \in \mathrm{O}(n)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して写像

$$f = f_{A,\boldsymbol{a}}\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f_{A,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

は等長変換.

$f(x) = Ax + a$, $f(y) = Ay + a$

$d(f(x), f(y)) = |f(y) - f(x)| = |\cancel{A}(y-x)| = |y-x|$

等長変換の決定

定理

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は　　f: 等長

$$f\ \ \varphi : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される．

① $g(x) = f(x) - f(0)$: g も等長, $g(0) = 0$

② $|g(x)| = |x|$ 　　$x \cdot y$

③ $g(x) \cdot g(y) = x \cdot y = \frac{1}{2}\left(|x|^2 + |y|^2 - |y - x|^2\right)$

④ g: 線形 i.e. $g(x) = Ax$

⑤ ② より $A \in O(n)$

幾何

$\boxed{\text{幾可}}$ ×

- 図形の性質
- "同じ図形"は同じ性質をもってほしい

ここでは　等長変換でうつり合うもの

合同

（講議 ×
成積 ×）

合同変換

$\mathbb{R}^n$ の等長変換を合同変換ということもある．等長変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{O}(n),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)$ が

- 向きを保つ合同変換 $\Leftrightarrow A \in \mathrm{SO}(n)$. $\boxed{\det A = 1}$
- 向きを反転する合同変換 $\Leftrightarrow A \in \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$.

$\boxed{\det A = -1}$