幾何学概論第一 (MTH.B211)

ユークリッド空間の曲線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/07

曲線のパラメータ表示

パラメータ表示された曲線：

微分幾何

区間

$$\gamma\colon \mathbb{R} \supset \underset{\sim}{J} \ni t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

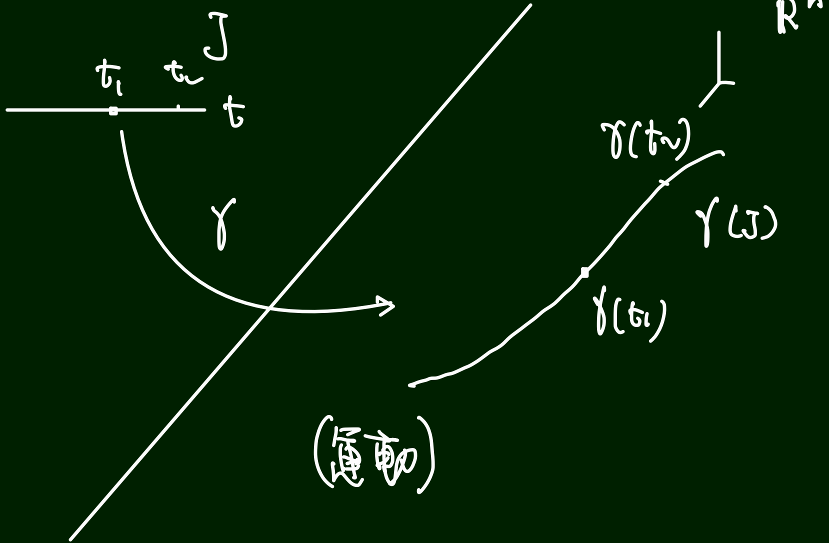
定義

γ が C^∞-級 $\Longleftrightarrow$ 各 $x_j\colon J \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ が C^∞-級

すべての r に対して

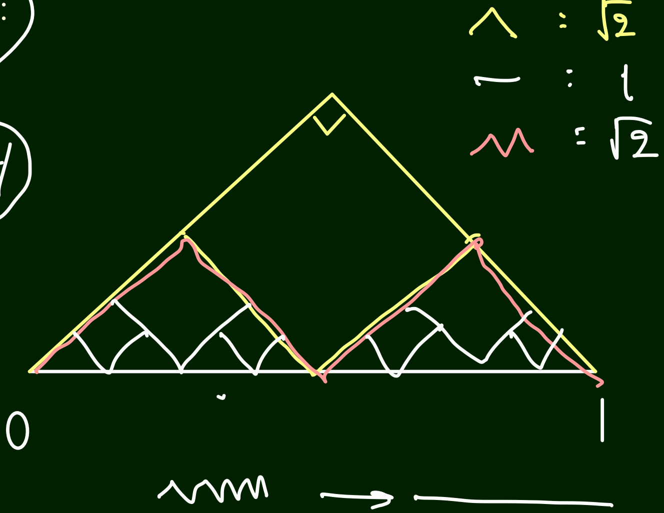
曲線：定義しない。

r 回微分可能かつ $\gamma^{(r)}$ が連続 C^r-級


J
t1
t2
t
γ
R^n
γ(t2)
γ(J)
γ(t1)
(運動)

曲線の弧長

$\sqrt{2} = 1$:



曲線の弧長

定義

パラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の弧長を次で定める:

(め)

みはじ

$$\overset{\text{み}}{\mathcal{L}(\gamma)} := \int_a^b \overset{\text{は}}{|\dot\gamma(t)|}\,dt. \quad \text{じ}$$

$\dot\gamma = \dfrac{d\gamma}{dt}$

速度ベクトル

命題

曲線の弧長は $\mathbb{R}^n$ の合同変換で不変.

$\tilde\gamma := A\gamma + a \qquad A \in O(n)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\tilde\gamma) = \mathcal{L}(\gamma)\ ; \quad \because\ |\dot{\tilde\gamma}| = |A\dot\gamma| = |\dot\gamma|$

曲線の弧長

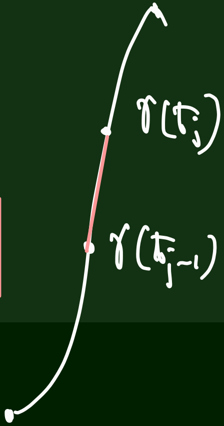
事実 (注意 1.8)

写像 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ と区間 $[a,b]$ の分割
$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

と定める．このとき γ が C^1-級ならば

$$\mathcal{L}(\gamma) = \boxed{\sup_{\Delta\colon [a,b] \text{ の分割}} \mathcal{L}_\Delta.}$$



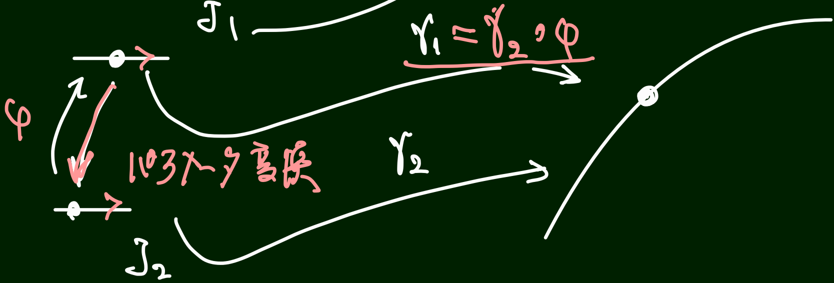
パラメータ変換

定義

とる

パラメータ表示された曲線 $\gamma_1\colon J_1 \to \mathbb{R}^n$ と $\gamma_2\colon J_2 \to \mathbb{R}^n$ に対して，γ_1 と γ_2 がパラメータ変換で移り合う，とは，C^∞-級全単射 $\varphi\colon J_1 \to J_2$ で次を満たすものが存在すること：

$$\boxed{\dot{\varphi} > 0 \quad (\text{on } J_1),} \qquad \gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi.$$



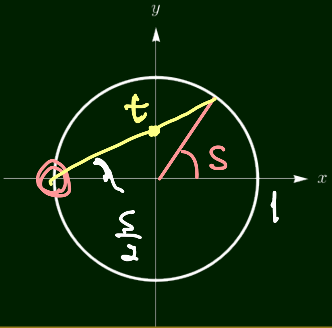
パラメータ変換（例）

例

$J_1 = (-\pi, \pi)$, $J_2 = \mathbb{R}$ として，$\gamma_1 \colon J_1 \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 \colon J_2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma_1(s) := {}^t(\cos s, \sin s), \qquad \gamma_2(t) := {}^t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

で定めると γ_1 と γ_2 はパラメータ変換で移り合う．



$$\boxed{t = \tan\frac{s}{2}}$$

パラメータ変換（例）

例

$J_1 = J_2 = J_3 = \mathbb{R}$,

$$\gamma_1(s) := \overset{t}{(s, 0)}, \qquad \gamma_2(t) := \overset{t}{(\sinh t, 0)}, \qquad \gamma_3(u) := \overset{t}{(u^3, 0)}$$

とおくと，γ_1 と γ_2 はパラメータ変換で移り合うが，γ_3 は γ_j $(j = 1, 2)$ とパラメータ変換で移り合わない.

$s = \sinh t$

$s = u^3$

$\dfrac{ds}{du} = 3u^2$

パラメータ変換

補題

1. 「パラメータ変換で得られる曲線である」という関係は同値関係である．
2. パラメータ付けられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ の像は γ の像と一致する．

パラメータ変換によらない性質
が重要

正則曲線 regular cur

$\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$：曲線のパラメータ表示

定義

- $t_0 \in J$ が $\boxed{\text{特異点}}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\dot\gamma(t_0) = \mathbf{0}}$.
- 特異点をもたないパラメータ表示を曲線の正則なパラメータ表示，略して正則曲線という． 速度≠0
- とくに $|\dot\gamma| = 1$ のとき弧長パラメータ表示という．

$\boxed{\text{はやさ }1}$

定理 (命題 1.11)

正則曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ とパラメータ変換で移り合う，弧長パラメータ表示された曲線が存在する．

証明．

点 $t_0 \in J$ を固定し，

$[t_0, t]$ の部分の弧長

$$s = \boxed{s(t)} = \int_{t_0}^{t} |\dot\gamma(u)|\,du\colon J \to J' := s(J) \subset \mathbb{R}$$

C^∞

を考えると，$\boxed{ds/dt = |\dot\gamma(t)| > 0}$ なので，逆関数定理より C^∞-級の逆関数 φ が存在する．$\gamma \circ \varphi\colon J' \to \mathbb{R}^n$ が求めるものとなる． □

$t = t(s)$

逆関数定理（一変数）

定理 (一変数関数の逆関数定理)

区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^r-級関数 $f\colon J \to \mathbb{R}$（$r \geqq 0$）の像 $f(J)$ は $\mathbb{R}$ の区間である．さらに $r \geqq 1$ の場合[1]の導関数 f' が J 上いたるところで 0 とならないとき，$f\colon J \to f(J) \subset \mathbb{R}$ は全単射で，逆写像 $f^{-1}\colon f(J) \to J$ も C^r-級である．

[1] この講義ではとくに断らない限り $r = \infty$ の場合を考える．

問題 1-1

問題

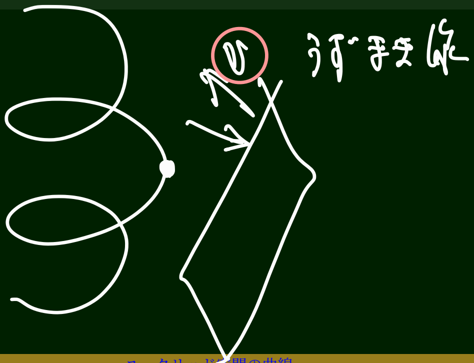
区間 $J = [0, \pi]$ 上の C^∞-級関数 $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin nx$ （$n = 1, 2, \dots$）と定数関数 $f_\infty(x) = 0$ を考える．

1. 関数列 $\{f_n\}$ は f_∞ に一様収束することを示しなさい．
2. 曲線 $\gamma_n(x) := {}^t(x, f_n(x))$ の弧長は $\gamma_\infty(x) = {}^t(x, 0)$ の弧長に収束しないことを示しなさい．

$y = f_n(x)$ の graph　$(x, f_n(x))$

問題

$\mathbb{R}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，原点を通り $\boldsymbol{v}$ に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への正射影を $\boxed{\pi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}$ と書く．零でない二つの定数 a, b に対して曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \ni t \longmapsto {}^t(a\cos t, a\sin t, bt) \in \mathbb{R}^3$ の正射影 $\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) := \pi_{\boldsymbol{v}} \circ \gamma(t)$ が $t = 0$ に特異点をもつような $\boldsymbol{v}$ を求めなさい．



問題

$J = (0, \infty)$ 上で定義された曲線 $\gamma(t) = {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ の弧長パラメータ表示を求めなさい.

双曲線関数

$$\operatorname{sech} t = \frac{1}{\cosh t}$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$\cdots$

本日の課題の提出締切は

2021年10月11日（月曜日）07:00 JST