幾何学概論第一 (MTH.B211)

ユークリッド空間の曲線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2021/10/07 (2021/10/14 訂正)

曲線のパラメータ表示

パラメータ表示された曲線：

$$\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \ni t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

定義

γ が C^∞-級 $\iff$ 各 $x_j\colon J \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ が C^∞-級

曲線の弧長

$\sqrt{2} = 1$：

曲線の弧長

定義

パラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の弧長を次で定める：

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt.$$

命題

曲線の弧長は $\mathbb{R}^n$ の合同変換で不変.

曲線の弧長

事実 (注意 1.8)

写像 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ と区間 $[a,b]$ の分割
$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

と定める．このとき γ が C^1-級ならば

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{\Delta\colon [a,b] \text{ の分割}} \mathcal{L}_\Delta.$$

パラメータ変換

定義

パラメータ表示された曲線 $\gamma_1\colon J_1 \to \mathbb{R}^n$ と $\gamma_2\colon J_2 \to \mathbb{R}^n$ に対して，γ_1 と γ_2 がパラメータ変換で移り合う，とは，C^∞-級全単射 $\varphi\colon J_1 \to J_2$ で次を満たすものが存在すること：

$$\dot{\varphi} > 0 \quad (\text{on } J_1), \qquad \gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi.$$

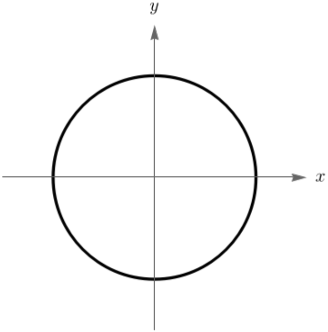
パラメータ変換（例）

例

$J_1 = (-\pi, \pi)$，$J_2 = \mathbb{R}$ として，$\gamma_1\colon J_1 \to \mathbb{R}^2$，$\gamma_2\colon J_2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma_1(s) := {}^t(\cos s, \sin s), \qquad \gamma_2(t) := {}^t\left(\tfrac{1-t^2}{1+t^2}, \tfrac{2t}{1+t^2}\right)$$

で定めると γ_1 と γ_2 はパラメータ変換で移り合う．



パラメータ変換（例）

例

$J_1 = J_2 = J_3 = \mathbb{R}$,

$$\gamma_1(s) := (s, 0), \qquad \gamma_2(t) := (\sinh t, 0), \qquad \gamma_3(u) := (u^3, 0)$$

とおくと，γ_1 と γ_2 はパラメータ変換で移り合うが，γ_3 は γ_j $(j = 1, 2)$ とパラメータ変換で移り合わない.

パラメータ変換

補題

1. 「パラメータ変換で得られる曲線である」という関係は同値関係である．
2. パラメータ付けられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ の像は γ の像と一致する．

正則曲線

$\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$：曲線のパラメータ表示

定義

- $t_0 \in J$ が特異点 $\iff \dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$.
- 特異点をもたないパラメータ表示を曲線の正則なパラメータ表示，略して正則曲線という．
- とくに $|\dot{\gamma}| = 1$ のとき弧長パラメータ表示という．

弧長パラメータ

定理 (命題 1.11)

正則曲線 $\gamma\colon J\to\mathbb{R}^n$ とパラメータ変換で移り合う，弧長パラメータ表示された曲線が存在する．

証明.

点 $t_0\in J$ を固定し，

$$s := s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot\gamma(u)|\,du\colon J\to J' := s(J)\subset\mathbb{R}$$

を考えると，$ds/dt = |\dot\gamma(t)| > 0$ なので，逆関数定理より C^∞-級の逆関数 φ が存在する．$\gamma\circ\varphi\colon J'\to\mathbb{R}^n$ が求めるものとなる． □

逆関数定理（一変数）

定理 (一変数関数の逆関数定理)

区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^r-級関数 $f\colon J \to \mathbb{R}$（$r \geqq 0$）の像 $f(J)$ は $\mathbb{R}$ の区間である．さらに $r \geqq 1$ の場合[1]の導関数 f' が J 上いたるところで 0 とならないとき，$f\colon J \to f(J) \subset \mathbb{R}$ は全単射で，逆写像 $f^{-1}\colon f(J) \to J$ も C^r-級である．

[1] この講義ではとくに断らない限り $r = \infty$ の場合を考える．

問題 1-1

問題

区間 $J = [0, \pi]$ 上の C^∞-級関数 $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin nx$（$n = 1, 2, \dots$）と定数関数 $f_\infty(x) = 0$ を考える.

1. 関数列 $\{f_n\}$ は f_∞ に一様収束することを示しなさい.
2. 曲線 $\gamma_n(x) := {}^t(x, f_n(x))$ の弧長は $\gamma_\infty(x) = {}^t(x, 0)$ の弧長に収束しないことを示しなさい.

問題 1-2

問題

$\mathbb{R}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，原点を通り $\boldsymbol{v}$ に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への正射影を $\pi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ と書く．零でない二つの定数 a, b に対して曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \ni t \longmapsto {}^t(a\cos t, a\sin t, bt) \in \mathbb{R}^3$ の正射影 $\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) := \pi_{\boldsymbol{v}} \circ \gamma(t)$ が $t = 0$ に特異点をもつような $\boldsymbol{v}$ を求めなさい．

問題 1-3

問題

$J=(0,\infty)$ 上で定義された曲線 $\gamma(t)={}^t(\operatorname{sech} t, t-\tanh t)$ の弧長パラメータ表示を求めなさい.